1. Pour tout $n > 0$ on note $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$. On note x_n le premier maximum de f_n sur $\mathbb{R}^+$. Étudier la suite de terme général x_n . (Mines-Ponts 09 *-Demon) O16-980

2. Étudier la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

   Étudier de même la convergence de la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$. (Mines-Ponts 09-Demon) O16-981

3. Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n^3 \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)^2\right)$.

   (Mines -Ponts 09-Demon) O16-982

4. $E = \left\{ f \in C^0\left(]0, +\infty], \mathbb{C}\right) / \forall s > 0, u \mapsto \frac{f(u)}{u+s} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty] \right\}$.

   On note $\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} du$. Soit $F = C^0\left(]0, +\infty], \mathbb{C}\right) \cap L^1\left(]0, +\infty], \mathbb{C}\right)$.

   (a) Comparer les ensembles E et F.

   (b) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $f_\alpha : u \mapsto u^{\alpha-1}$ soit élément de E. Montrer alors que $\hat{f}_\alpha$ est proportionnelle à f_α.

   (c) Montrer que $\hat{f}$ est continue et déterminer sa limite en $+\infty$.

   (Mines-Ponts * 09-Demon) O16-983

5. Pour n entier, $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)dx$. Montrer l'existence de cette intégrale, l'exprimer comme somme d'une série et enfin en déterminer un équivalent à l'infini. (Mines -Ponts 09 *-Demon) O16-984

6. $E = C^0(\mathbb{R})$. . Pour tout $f \in E$, tout x réel, $\varphi(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t) f(t) \, dt$.

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer f tel que $\varphi(f)$ soit une fonction constante.

   (Mines-Ponts 09 *-Demon) O16-985

7. Soit $a > 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{n^2 x^2}\right)$.

   Déterminer l'ensemble de définition de f.
   Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$. (Mines -Ponts 09-Demon) O16-986

8. Soit f l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = Q(X)$ défini par $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$.

   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant. (Mines -Ponts 09-Demon) O16-987

9. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Le coefficient général de A^{-1} est noté $a'_{i,j}$. J est la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

   Montrer que $\det(A+J) = \det(A)\left(1 + \sum_{1 \le i,j, \le n} a'_{i,j}\right)$. (Mines -Ponts 09-Demon) O16-988

10. Déterminer les matrices réelles A de taille $n > 2$, telles que A^2 soit une matrice dont tous les coefficients sont nuls exceptés ceux de la surdiagonale, tous égaux à 1. (Mines -Ponts 09-Demon) O16-989

11. Soit $P : y = 2px$ parabole, soit $M_n(x_n, y_n) \in P$. M_{n+1} est l'intersection entre la normale à P en M_n avec P. Étudier la série de terme général $1/x_n$. (Mines -Ponts 09-Demon) O16-990

12. On considère la courbe de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases}$

    Préciser la nature des deux surfaces dont on étudie l'intersection. Déterminer la tangente à cette courbe en un point (x_0, y_0, z_0). (Mines -Ponts 09-Demon) O16-991