1. I) Cours : montrer que si $u_n = O(v_n)$ avec u_n et v_n positifs, si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge aussi.

   II) $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

   Montrer que u défini par $u(P) = \displaystyle\int_0^1 (X+t)^n P(t)\mathrm{d}t$ est un endomorphisme symétrique et qu'il existe une base de vecteurs propres $(P_0, \dots, P_n)$.

   Montrer que $(X+Y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X) P_k(Y)$ où les λ_k sont les valeurs propres associées aux P_k. En déduire la trace de u. *ENSIIE* O14-C388

2. I) Cours : convergence des séries, définition et comparaison.

   II) Montrer que P_n veerifiant $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$ est unique.
   Montrer que $P_n'(X) + P_n'(X+1) = n\big(P_{n-1}(X) + P_{n-1}(X+1)\big)$.
   Exprimer $P_n(X+1)$ dans une base astucieusement choisie.
   Montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$. *ENSIIE* O14-C389

3. I) Prolonger $F(x,y) = \dfrac{|y|}{x}\mathrm{e}^{-\frac{|y|}{x^2}}$ par continuité.

   Existence et continuité de $\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot$

   II) Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme f d'un espace de dimension finie, vérifiant $\exists \lambda \in K$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $(f - \lambda Id)^p = Id$. *ENSEA* O15-187

4. I) Cours : montrer qu'une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

   II) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & n-1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   Soit P_k pour $0 \leq k \leq n$, défini par $P_k(X) = (X+1)^k (X-1)^{n-k}$.
   Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   M est-elle diagonalisable ? Calculer $\det M$ en fonction de n. *ENSIIE* O16-218

5. I) Diagonaliser la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de coefficients tous égaux à -1.

   II) En utilisant la convergence de la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$, montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x + 1}}\mathrm{d}x$ converge. *ENSEA* O16-C299

6. I) Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n}\big((n+1)^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}\big)$.

   II) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = 3 \end{cases}$ où a, b, c sont les racines de $X^3 - X + 1$ *ENSEA* O16-C300

7. I) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\mathrm{d}x$.

   II) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.

   Montrer que $\|A^{-1}\|_2 \leq 2^{n-1}$. *ENSEA* O16-C301