1. (a) i. Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. Démontrer que $(|u|^2 - |v|^2)^2 = \left[\dfrac{|u+v|^2 + |u-v|^2}{2}\right]^2 - 4|uv|^2$.

   ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et λ_1, λ_2 les racines de $z^2 + az + b = 0$. Trouver une CNS pour que $|z_1| = |z_2|$.

   (b) i. Soit $f_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM$ ($A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ étant donnée).
   Exprimer la matrice de f_A dans la base canonique raisonnablement ordonnée et calculer le déterminant de f_A.

   ii. Même question pour $M \mapsto^t M$.

   iii. Même question pour $M \mapsto P^{-1}MP$ pour $P \in GL_n(\mathbb{C})$ donné.

   Centrale-DeB O15-905

2. (a) Etudier la courbe définie en polaires par $\rho(\theta) = \dfrac{\theta - 1}{(\theta-3)(\theta+1)}$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on définit $f - n(x) = 3^n \left(x^{2^n} - x^{2^{n-1}}\right)$.

   i. Prouver que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers g qu'on déterminera.

   ii. Est-il possible de trouver une approximation affine de g au voisinage de 0 ?

   Centrale-Ber O15-907

3. I- Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A, B \in E$ non nulles. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ par $\forall X \in E \quad f(X) = X + \mathrm{tr}(AX)B$.
   Trouver une CNS pour que f soit diagonalisable.

   II- Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $B = (u,v,w)$ une base orthonormale de E. Soit $f : x \mapsto u \wedge x$. Résoudre l'équation $g^2 = -f^2$ où $g \in S_n^+(E)$. *Centrale-Pie* O15-912

4. (a) Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que Ax et Bx soient colinéaires.

   (b) Montrer qu'il existe P, Q inversibles telles que PAQ et PBQ soient triangulaires supérieures.

   Centrale-Grab O16-961

5. I) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, calculer la distance du vecteur de coordonnées $(1,2,3)$ à la droite vectorielle engendrée par le vecteur de coordonnées $(-1,1,1)$.

   II- ? ?) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au moins égal à 1 ; on note $N(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P, r^+ (respectivement r^-) le nombre de racines strictement positives (respectivement strictement négatives) de P.

   Déterminer r^+ et r^- quand $N(P) = 1$.

   Majorer r^+ et r^- quand $N(P) = 2$.

   Dans le cas général, montrer que, si $P(0) = 0$, $r^+(P) \leq 1 + r^+(P')$ (idem pour r^-), et que $r^+(-P) \leq r^+(-P')$.

   Montrer que $r^+(-P) \leq N(P) - 1$.

   Soit $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ des réels et D le déterminant de terme général est x_i^{nj}.

   Déterminer le signe de D dans le cas où $n_i = i$.

   Déterminer le signe de D dans le cas général (on montrera que D ne s'annule pas).

   Cent O16-C037

6. I) Déduire, de la nature de $\sum \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \prod\limits_{k=2}^{n} (1 + \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}})$.

   De la nature de la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln n$, déduire la limite de la suite $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$.

   En déduire la nature de $\sum u_n$.

   II) Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = f(\pi) = 0$, $J = \displaystyle\int_0^\pi f(t) f'(t) \frac{\cos t}{\sin t}\, \mathrm{d}t$ existe-t-elle ? Calculer J en fonction de $\displaystyle\int_0^\pi f^2(t)\, \mathrm{d}t$, grâce à une intégration par parties.

   Calculer $I_a = \displaystyle\int_0^\pi \left(f'(t) + a\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2 \mathrm{d}t$ par une autre méthode, de manière à prouver que $\displaystyle\int_0^\pi f'^2(t)\, \mathrm{d}t \geq \int_0^\pi f^2(t)\, \mathrm{d}t$.
   Quand a-t-on égalité ?

   On prolonge f à $\mathbb{R}$ en la déclarant 2π-périodique : appliquer la formule de Parseval pour retrouver les résultats précédents.

   Cent O16-C041

7. I) Quelles fonctions f, continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifient $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$?

   Quelles fonctions f, continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifient $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$ (on pourra poser $\mathrm{e}^{it}f = u + iv$) ?

   II) Si cela a un sens, calculer le rayon de courbure de $y = x^2$.

   Cent O16-C042

8. I) Montrer que la suite de terme général $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ converge. Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$. Montrer que $a_{n+1} = \big(1 - \dfrac{1}{3n}\big)a_n$.

   On note $v_n = n^{\frac{1}{3}} a_n$; donner un développement limité de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et en déduire un équivalent de a_n.

   II) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :
   $\exists k \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq k$.
   Montrer que $g(x) = a + f\big(b + f(x)\big)$ est lipschitzienne.
   Montrer que F, definie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = \big(x - f(y), y - f(x)\big)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (on pourra remarquer que si f vérifie $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ sur $\mathbb{R}$, alors f admet un point fixe).

   Cent O16-C045

9. I) Soit $a, b, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels et $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée d'ordre n vérifiant $a_{i,i} = \alpha_i$, $a_{i,j} = a$ si $j > i$ et $a_{i,j} = b$ sinon. On note J_n matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.
   Montrer que $\det(A - xJ_n)$ est polynomiale de degré au plus 1 en x.
   Déterminer une expression de $\det(A)$.
   Que dire des valeurs propres de A quand $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$?
   II) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit α un réel. On considére $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille LIÉE de vecteurs UNITAIRES vérifiant pour tout couple $(i,j) \in [1,n]^2$, si $i \neq j$, alors $(e_i|e_j) = \alpha$.
   Montrer que nécessairement $\alpha < 1$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n e_i = 0$ (on pourra calculer $(e_k|\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j)$)
   Déterminer $\dim\big(Vect(e_1, \ldots, e_n)\big)$ Montrer que $\alpha = -\dfrac{1}{n-1}$.
   Déterminer une telle famille quand $n = 2$ puis 3.

   Cent O16-C052

10. I) Montrer que g, vérifiant, au voisinage de 0, l'équation différentielle $g'(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k}\right) g(x)$, est développable en série entière et en déduire que $f(x) = x \mapsto \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}\right)$ l'est aussi.

    II) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $Q \in E$ fixé non nul. Pour $P \in E$ on pose : $\|P\| = \displaystyle\sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$ et $\|P_Q\| = \displaystyle\sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)Q(x)|$.
    Montrer que si Q ne s'annule pas sur $[-1,1]$ ces deux normes sont équivalentes.
    On suppose que Q s'annule en $\alpha \in [-1,1]$.
    Montrer qu'il existe P de degré 2 tel que $P(\alpha) = 1, P'(\alpha) = 0$ et $0 \leq P(x) < 1$ pour $x \in [-1,1] \setminus \{\alpha\}$.
    Donner le graphe de P.
    En utilisant la continuité de Q, montrer quelque chose ? ?
    Les deux normes sont-elles équivalentes ?

    Cent O16-C053