1. I) Développer $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx)\, \mathrm{d}t$ en série entière.

   II) Donner l'axe de symétrie de la courbe $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$.

   Donner la tangente en un point de paramètre t_0.
   Étudier la courbe au voisinage de 1 et donner la tangente en ce point.
   Préciser la méthode d'étude d'un point singulier. (INT) O16-219

2. I) Nature de $(\sum u_n)$ où $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

   II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et inversible.
   $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $B^p = A$, est-elle diagonalisable ? (INT) O16-220

3. I) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cos\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

   II) Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien, donner la matrice de la projection orthogonale sur $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = x-y+z-t = 0 \right\}$.

   (INT) O16-221

4. I) Soit u_n telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On définit alors $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+t^3}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

   II) Si f et g sont deux endomorphismes d'un espace de dimension n, montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \mathrm{rg}(g)$;
   $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$; $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g)$;
   $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leq \mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$. (INT) O16-222

5. I) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinctes ou non. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2} a_{ij}^2$.

   II) Soit $a \in [0, 1[$. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2ax + x^2}}$ est-elle développable en série entière ? (INT) O16-223

6. I) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^x - 1 \right) \ln x$.

   II) Soient u et v deux applications symétriques positives sur $\mathbb{R}$. Montrer que $0 \leq \mathrm{tr}(u \circ v) \leq \mathrm{tr}(u)\mathrm{tr}(v)$.
   (INT) O16-C302

7. I) Soient A et B deux matrices réelles, $C = A + iB$, A et C étant inversibles.
   Montrer que $M = A + BA^{-1}B$ est inversible et calculer C^{-1}.

   II) Limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. (INT) O16-C303

8. I) Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x$.

   II) Soit E un espace de dimension n et p un projecteur orthogonal de rang r de E. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = < p(x)|x >$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = r$. (INT) O16-C304

9. I) Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^{\frac{1}{x}}} \mathrm{d}x$.

   Cours : quelle est la relation entre « f est intégrable sur I » et « l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ converge » ?

   II) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que les trois points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z, z^2, z^5 soient alignés. Quelle est la nature de la courbe ainsi obtenue ? (INT) O16-C305