1. (a) Identifier la surface Σ d'équation $x^2+4y^2+5z^2-4xy=1$ dans le repère $R=(O,i,j,k)$ orthonormé direct. Vérifier le résultat à l'aide de Maple.
   (b) On note γ l'intersection de Σ avec le plan $P : x-y+z=0$.
   Tracer P et Σ sur Maple et en déduire γ.
   (c) Déterminer le vecteur K normal à P, le vecteur I de même direction que $i+j$ et le vecteur J tels que $R'=(O,I,J,K)$ soit orthonormé direct, puis donner l'équation de Σ dans R'.

   Centrale O20-098

2. (a) Montrer que $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Calculer $\langle X^k, X^l\rangle$ pour $(k,l)\in [\![0,5]\!]^2$.
   (b) Donner la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.
   Tracer les polynômes obtenus sur $[-1,1]$. Montrer que ces polynômes vérifient $N_\infty(P)=\max\limits_{t\in[-1,1]}|P(t)|\leq 3\sqrt{2}$ et discuter le cas d'égalité.
   (c) La norme euclidienne associée au produit scalaire introduit en (a) et la norme N_∞ sont-elles équivalentes sur $\mathbb{R}_5[X]$? sur $\mathbb{R}[X]$?

   Centrale O20-102

3. Soient $B=(e_1,...,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme défini par $\forall k\leq n-1,\ f(e_k)=e_{k+1}$ et $f(e_n)=e_1$.
   (a) Donner la procedure permettant de créer, en fonction de n, la matrice A de f dans B. La mettre en application pour $n=6$.
   (b) Pour $n=6$, donner le polynôme caractéristique de A et le factoriser.
   On note R_i les polynômes irréductibles dont le produit est égal au polynôme caractéristique de A.
   Donner $\ker R_i(f)$ et montrer que, pour $n=6$, ces noyaux sont supplémentaires.
   Réduire A dans $M_6(\mathbb{C})$.
   (c) Reprendre la question précédente pour n quelconque.

   Centrale O20-104

4. On note $f_k(t)=\exp(ikt)-\dfrac{\exp(-i(k+1)t)}{k+1}$.
   (a) A l'aide du logiciel, représenter f_k pour $k=4$ et $k=8$.
   Justifier les symétries remarquées.
   (b) Calculer la longueur de l'arc.
   (c) Déterminer les vecteurs normaux et tangents en un point quelconque.
   Calculer la courbure.

   Centrale O20-107

5. Soient $A=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & -\sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base canonique B de $E=\mathbb{R}^4$ et $g_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.
   (a) Calculer A^{10}, A^{20}, A^{100}. Qu'observe-t-on ?
   (b) Soit A_n la matrice de g_n dans B ; calculer A_{100}^2. Que conjecturer ?
   (c) Déterminer les droites vectorielles stables par f.
   Vérifier que $E=\mathrm{Im}(f-Id)\overset{\perp}{\oplus}\ker(f-Id)$ et $E=\mathrm{Im}(f-\frac{1}{2}Id)\overset{\perp}{\oplus}\ker(f-\frac{1}{2}Id)$.
   (d) Déterminer 3 nombres réels α,θ et r, ainsi qu'une base B' de $\mathbb{R}^4$ tels que la matrice de f dans B' soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & 0 & r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

Centrale O20-111

6. 1 Dans l'espace affine usuel, muni de son repère canonique, on donne les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et les points $A(2, 3, 4)$ et $B(-1, 1, 1)$.
   (a) La droite D_1 dirigée par u, passant par A, et la droite D_2 dirigée par v, passant par B, sont-elles coplanaires ? Les tracer sur un même graphe.
   (b) Soit $M(x, y, z)$; calculer $d_1(M, D_1)$ et $d_2(M, D_2)$.
   Tracer $S = \{M(x, y, z)/d_1(M) = d_2(M)\}$ et en déduire sa nature.
   (c) Tracer D_1, D_2 et D sur un même graphe.
   (d) Trouver un repère dans lequel S est réduite et donner son équation.
   Comment trouve-t-on le centre d'une quadrique ?
   Quelle est l'équation réduite d'un paraboloïde hyperbolique ?

Centrale O20-113

7. (a) Montrer que (x_n) et (y_n) définies par $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \\ x_0 = y_0 = 0 \end{cases}$, existent.
   (b) Donner des valeurs approchées de leurs 10 premiers termes et faire une conjecture sur leur convergence.
   Si elles convergent, quelles sont leurs limites ?
   (c) Montrer qu'elles convergent et donner n_0 tel que , si $n \geq n_0$, alors $|x_n - l_x| \leq 10^{-3}$ et $|y_n - l_y| \leq 10^{-3}$.

Centrale O20-115