1. (a) Soit $0 < a < b$ des réels, et $h \in \mathbb{R}$.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,h) = (x-a)(b-x) + hx^3$.
   Pour cette question seulement, on prend $a = 1$ et $b = 2$.
   Tracer sur un même dessin des graphes pour différentes valeurs de $h \in [0, 1/10]$ et $x \in [0, 10]$.
   Pour h assez petit, montrer qu'on a 3 racines de f telles que :
   $0 < x_1(h) < a < b < x_2(h) < x_3(h)$.
   On considère x_1, x_2, x_3 comme des fonctions de h.
   On admet qu'il existe $r > 0$ tel qu'on peut prolonger x_1 et x_2 sur $[0, r]$ et x_3 sur $]0, r]$ en fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Montrer que x_1 admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
   Montrer que x_3 admet un développement asymptotique à l'ordre 4 en 0.
   Justifier l'existence de $I(h) = \displaystyle\int_{x_1(h)}^{x_2(h)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x,t)}}$ puis la calculer en posant $x = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{x_2 x_1}{2}\right) \sin t$.

   Centrale O19-078

2. (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy : $y' = \dfrac{\cos y}{1 + y^2}$, $y(0) = 0$.
   On note I son intervalle de définition.
   Tracer y avec le logiciel de calcul formel.
   Montrer que y est bornée. Quelles sont ses variations ?
   Préciser I. Etudier la parité et la concavité de y. A-t-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ? Donner son développement limité à l'ordre 9.

   Centrale O19-079

3. (a) Soit q une fonction strictement négative sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit y_1 la solution de $y" + qy = 0$ telle que $y_1(0) = y_1'(0) = 1$.
   Tracer avec Maple le graphe de y_1 sur $[0, 6]$ pour plusieurs valeurs de q.
   Que peut-on conjecturer sur le signe, les variations et la convexité de y_1 ?
   Montrer que y_1, est strictement positive, strictement croissante et strictement convexe sur $\mathbb{R}_+$.
   Montrer que $\dfrac{1}{y_1^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $y_2(x) = y_1(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y_1^2(t)}$ est solution de l'équation différentielle.
   (y_1, y_2) est-elle une base de l'ensemble des solutions de l'équation ?
   Montrer que y_2 admet une limite finie en $+\infty$.
   Quel est l'ensemble des solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$?
   On suppose que q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y_2'(x) = 0$.

   Centrale O19-081

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de manière de couper un polygone à $n + 2$ côtés en triangles. On pose $a_0 = a_1 = 1$ et on a clairement $a_2 = 2$.
   Calculer a_3 et montrer que $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
   Calculer les 21 premiers termes de (a_n) avec Maple, ainsi qu'une valeur approchée de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ pour $n \in [\![0, 20]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
   On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et on note f la somme de cette série sur $]-R, R[$.
   Trouver une équation du second ordre E_n vérifiée par f sur $]-R, R[\setminus\{0\}$.
   Trouver une fonction g développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$ vérifiant E_n sur $]-r, r[\setminus\{0\}$.
   Calculer le 20 prmiers coefficients du développement en série entière de g et montrer que ces coefficients vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence que les a_n. Conclure.
   Donner un équivalent de a_n et vérifier ce résultat avec Maple.

   Centrale O19-084

5. (a) Calculer les 200 premiers termes de la suite définie par $u_n = \dfrac{Card E_n}{n^2}$ où $E_n = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i^2 + j^2 \leq n^2\}$.
   Que peut-on conjecturer ?
   En raisonnant sur les symétries, montrer que $Card E_n = 1 + 4n + 4\, Card E_n^{++}$ où E_n^{++} est le sous-ensemble de E_n dont les éléments sont des couples d'entiers naturels.

Montrer que $CardE_n^{++}=\sum_{i=0}^{n}E(\sqrt{n^2-i^2})$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x, puis que $\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{n^2-i^2}$ converge et calculer sa limite.
En déduire la limite de (u_n).
Donner le rayon de convergence de la série $\sum x^{n^2}$.
Soit $f(x)$ sa somme sur $]-1,1[$; à l'aide de Maple, faire une conjecture sur la limite en 1^- de $(1-x)(f(x))^2$.
Montrer que $\frac{1}{1-x}(f(x))^2$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et vaut $\sum_{r\geq 0}a_rx^r$ où $a_r=CardE_r^{++}$.
Montrer que $a_r \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^2\pi}{4}$.
On admet que, si $a_n\sim b_n$, si la série de terme général b_nx^n diver en 1 et si $\sum a_nx^n$ admet 1 pour rayon de convergence, alors $\sum a_nx^n$ diverge en 1 et $\sum_{n\geq 0}a_nx^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n\geq 0}b_nx^n$.

Donner la limite en 1^- de $(1-x)(f(x))^2$.

Centrale O19-087

6. (a) Montrer que f, définie pour x réel par $f(x)=\frac{1+\cos x}{2-\cos x}$, est somme en tout point de sa série de Fourier. Ecrire l'égalité obtenue (on ne cherchera pas à calculer les coefficients de Fourier de f) ; quel est le type de la convergence de cette série ?
A l'aide de Maple, calculer $a_n(f)$ pour $0\leq n\leq 5$.
Dans cette question, on pourra s'aider de Maple pour des vérifications mais l'essentiel du calcul doit être fait à la main ; exprimer $f(x)$ en fonction de e^{ix} et en déduire la série de Fourier de f (complexe d'abord, puis réelle).
Trouver une relation de récurrence sur les $a_n(f)$; en déduire une autre méthode pour déterminer la série de Fourier de f.
Soit E_ω l'équation différentielle $y"+\omega^2y=f(x)$.
Tracer, avec Maple, les solutions de $E_{1/2}$ qui vérifient $y(0)=k, y(1)=0$ pour k entier de 1 à 5.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur ω pour que E_ω admette au moins une solution $2\pi-$périodique.

Centrale O19-090

7. (a) Dire pour quelles valeurs de x $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ et $\int_0^1\frac{x(1-t)}{(1-xt(1-t))^2}\,\mathrm{d}t$ sont définies.
On admet l'égalité de ces deux expressions. Avec Maple, exprimer l'intégrale à l'aide des fonctions usuelles pour $x\in]-4,4[$.
En déduire les valeurs de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{\binom{2n}{n}}$.
Déterminer a et b tels que $\sum_{n\geq 1}\frac{an+b}{\binom{2n}{n}}=\pi$.
Montrer que $\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
Montrer que $\int_0^1\frac{x(1-t)}{(1-xt(1-t))^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

Centrale O19-091

8. (a) Dans $E=\mathbb{R}^3$, on donne les droites :

$$D_1=\left\{\begin{array}{c}x+y=a\sqrt{2}\\ z=-a\end{array}\right.\ ;\ D_2=\left\{\begin{array}{c}x-y=-b\sqrt{2}\\ z=b\end{array}\right.\ ;\ D_3=\left\{\begin{array}{c}x=0\\ z=-c\end{array}\right.$$

On admet que D coupe l'intersection de $P_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ et $P_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que D soit contenue dans le plan P d'équation $\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$.
Soit $M(\alpha,\beta,\gamma)$ n'appartenant à aucune des trois droites données.

Calculer les équations des plans Π_i passant par M et contenant D_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
Donner l'équation de la surface S constituée des droites D coupant chaque droite D_i. Qualifier cette surface.
Préciser S pour $a = 1, b = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1, c = \sqrt{2}$ et représenter simultanément S et les droites D_i à l'écran.

Centrale O19-093

9. (a) Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$.
Etudier la continuité de f et tracer son graphe.
Sur quel intervalle sont définies les solutions maximales de l'équation $E_k : y" + ky = f(x)$? Combien de solutions vérifient $y(0) = y'(0) = 1$?
Résoudre $E_{1/4}$ avec les conditions initiales précédentes et tracer le graphe de la solution, notée Φ.
Calculer les valeurs de f en $0, \pi/2, \pi$.
Trouver un polynôme P de degré minimal qui prend les mêmes valeurs que f en ces 3 points.
Montrer, à l'aide d'une série de Fourier, que f et P coïncident sur $[0, \pi]$.

Centrale O19-096

10. (a) A l'aide de Maple, résoudre $y" - y'^2 + yy'^3 = 0$.
Donner une famille évidente de fonctions solutions.
Soit f une solution sur un intervalle I de dérivée non nulle.
Donner une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.
Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, puis que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
Donner une équation différentielle d'ordre 1 dont f^{-1} est solution.

Centrale O19-099

11. (a) On définit les suites (α_n) et (β_n) par $\alpha_0 = 1, \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$ et $\beta_n = \dfrac{\alpha_n}{n!}$.
Déterminer des valeurs exactes et approchées de $\beta_i, i = 1..6, \beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}$. Conjecturer.
Développer $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ en série entière, d'abord en utilisant un produit de Cauchy, puis en utilisant la suite (β_n).
Déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue puis celui de la série $\sum \beta_n x^n$.
Sur quel intervalle f est-elle égale à la somme de son développement en série entière ?
Ecrire une procedure qui donne "true" si une liste est une permutation de $\leq 1, n \rrbracket$ et "false" sinon.

Centrale O19-102

12. (a) Montrer que $K(x, y) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin(ny)\sin(nx)}{n^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
Tracer $z = K(x, y)$ dans un repère orthonormé.
On suppose y fixé dans $\mathbb{R}$; montrer que z est continue.
On définit E_x impaire et $2\pi-$périodique par $E_x(t) = t(\pi - x)$ pour $0 \leq t \leq x$ et $E_x(t) = x(\pi - t)$ pour $x \leq t \leq \pi$. Tracer E_1 sur $[0, \pi]$ (on utilisera piecewise).
Justifier la convergence de E_x et calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.

Centrale O19-104

13. (a) Soit Φ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t$.
Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_n(k)Q(k) = \Phi(Q)$. Calculer P_i pour $0 \leq i \leq 5$.
Tracer la courbe représentative de ces polynômes sur $[-1, 5]$.
Que peut-on conjecturer sur les P_i suivants ?

Centrale O19-105

14. (a) Tracer, à l'aide de Maple, $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^{2/3}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donner un développement de f en 0 et montrer que f est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Ce prolongement est-il $\mathcal{C}^2$?
Trouver une minoration de f sur les segments $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$ et dire si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. f est-elle de carré intégrable ? f' est-elle de carré intégrable ? $f"$ est-elle de carré intégrable ?

(b) Soit f continue et de carré intégrable sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $f"$ soit de carré intégrable sur $[a, +\infty[$; f' est-elle de carré intégrable sur $[a, +\infty[$ (on pourra montrer que $ff"$ est de carré intégrable sur $[a, +\infty[$) ?
Trouver une primitive de $f^2 - f'^2 + f"^2 - (f + f' + f")^2$ et en déduire que $f^2 - f'^2 + f"^2$ est d'intégrale positive sur $[a, +\infty[$.

Centrale O19-109