Notations et définitions.

- $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
- On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et L^1 l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in L^1$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$.
- On note B l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^+$.
  Si $f \in B$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f|$.
- Si $\alpha \in [1,+\infty[$, on convient que $0^\alpha = 0$; ainsi, $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^\alpha$ est continue.
- On pose, lorsque cela a un sens, $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\, dt$.
- Si $\alpha \in [1,+\infty[$ et h est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on note $E_{\alpha,h}$ l'équation différentielle linéaire

$$(E_{\alpha,h}) \ : \ y'' - \frac{1}{1+t^\alpha} y' + y = h$$

  Par définition, une solution de $(E_{\alpha,h})$ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de la variable t de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E_{\alpha,h})$.
- Pour une équation différentielle linéaire du second ordre (E), de second membre h, on définit les propriétés de stabilité suivantes :
  – on dira que (E) est **stable par rapport aux conditions initiales** si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si f est une solution de (E) vérifiant $\|(f(0), f'(0))\| \leq \eta$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.
  – on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens 1** si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $h \in L^1$ est tel que $\|h\|_1 \leq \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.
  – on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens** ∞ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $h \in B$ est tel que $\|h\|_\infty \leq \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.

  De plus, dans le cas de l'équation $(E_{\alpha,0})$:
  – on dira que (E) est **stable par rapport au paramètre** si et seulement si pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : si $\beta \in [1,+\infty[$ vérifie $|\alpha - \beta| \leq \eta$, f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et g est solution de $(E_{\beta,0})$ avec $(f(0), f'(0)) = (g(0), g'(0)) = (a,b)$, alors $f - g \in B$ et $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Partie I. Etude de l'équation $y'' + y = h$.

Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, on note (F_h) l'équation différentielle $y'' + y = h$. Par définition, une solution de (F_h) est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (F_h) ?

I.A.

A.1. Donner l'ensemble des solutions de (F_0).

A.2. Dans cette question uniquement, on prend pour $h : x \mapsto \cos(x)$. Donner l'ensemble des solutions de (F_h) dans ce cas.

A.3. Dans cette question uniquement, on prend pour h la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Déterminer l'ensemble des solutions de (F_h) sur un segment $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ pour $k \in \mathbb{N}$; on les exprimera au moyen de deux "constantes d'intégration " A_k, B_k.

Déterminer l'ensemble des solutions de (F_h) sur un intervalle $](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$ pour $k \in \mathbb{N}$; on les exprimera au moyen de deux "constantes d'intégration " C_k, D_k.

Déterminer l'ensemble des solutions de (F_h) (sur $\mathbb{R}_+$).

I.B. **Stabilité par rapport aux conditions initiales.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f est la solution de (F_0) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (a, b)$. Montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|(a, b)\|$.

I.C. Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Montrer que $f_0 : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^t h(u) \sin(t - u)\, du$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et que f_0 est solution de (F_h).

En déduire l'ensemble des solutions de (F_h).

I.D. **Stabilité par rapport au second membre au sens 1.**

On suppose dans cette question que $h \in L^1$.

Déterminer la solution f de (F_h) vérifiant $(f(0), f'(0)) = 0$.

Montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|h\|_1$.

En déduire que (F_h) est stable par rapport au second membre au sens 1.

I.E. **Stabilité par rapport au second membre au sens ∞.**

Soit $\delta > 0$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \delta \cos(t)$.

Montrer que ses solutions sont non bornées.

En déduire la non stabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞.

Partie II. Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

Cette partie est indépendante de I.

II.A. Démontrer l'existence de $I(\alpha)$, pour $\alpha > 1$, et la continuité de l'application $\alpha \mapsto I(\alpha)$.

II.B. On donne $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$.

B.1. Justifier l'existence d'une primitive A de $\dfrac{g'}{g}$.

Montrer que ge^{-A} est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$.

B.2. En écrivant la fonction A sous la forme $A = B + iC$, où B et C sont des fonctions à valeurs réelles, justifier qu'existent $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tels que $g = re^{i\theta}$.

II.C. **Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$.**

Soit $\alpha > 1$ et f une solution non nulle de $(E_{\alpha,0})$. On note $q : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1 + t^\alpha}$.

C.1. Soit $g = f + if'$. Montrer que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}^*$.

En appliquant II.B, on a donc montré qu'existent $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que

$$(REL) : \quad f = r\cos(\theta) \text{ et } f' = r\sin(\theta).$$

Les fonctions r et θ sont fixées ainsi pour la suite de cette partie.

C.2. Déduire des relations (REL) et $(E_{\alpha,0})$ que $\theta' = -1 + q\sin(\theta)\cos(\theta)$ et $r' = qr\sin^2(\theta)$.

C.3. Exprimer $r(t)$ en fonction de $r(0)$ et d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

En déduire que r a une limite strictement positive en $+\infty$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} r \leq r(0)\exp(I(\alpha))$.

Démontrer que f et f' sont bornées par $\|(f(0), f'(0))\| \exp(I(\alpha))$.

C.4. Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\theta(0)$ et d'une intégrale.

En déduire que $\theta(t) + t$ tend vers une limite réelle quand $t \to +\infty$.

C.5. Démontrer qu'existent $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) - a\cos(t + b) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

C.6. Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie III. Etude de la stabilité pour $\alpha > 1$.

Cette partie utilise des résultats de II.A, II.C et I.5.

Dans toute la partie, $\alpha > 1$, et (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(E_{\alpha,0})$.

$w = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ *est le wronskien associé.*

On pensera à utiliser les résultats de II.

III.A. **Stabilité par rapport aux conditions initiales.**

Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

III.B. **Stabilité par rapport au second membre au sens 1.**

B.1. Déterminer une équation différentielle vérifiée par w.
En déduire une expression de $w(x)$ en fonction de $w(0)$ et d'une intégrale et montrer qu'existent a, b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < a \leq |w(x)| \leq b$.

B.2. Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
Montrer que les solutions de $(E_{\alpha,h})$ sont les fonctions du type $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$, où C_1 est une primitive de $\dfrac{-hf_2}{w}$ et C_2 une primitive de $\dfrac{hf_1}{w}$.

B.3. C_1 et C_2 sont les mêmes que dans la question précédente.
Montrer que $(f(0), f'(0) = (0,0) \iff C_1 = C_2 = 0$.

B.4. Démontrer que, si $h \in L^1$, alors la solution f de $(E_{\alpha,h})$ vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$ est dans B, et qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^+$ telle que $\|f\|_\infty \leq C\|h\|_1$.
En déduire que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au second membre au sens 1.

III.C. **Instabilité par rapport au second membre au sens ∞.**

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit g solution de $y'' + y = \lambda \cos(t)$.
Soit f la solution sur $\mathbb{R}^+$ de $y'' - \dfrac{1}{1+t^\alpha} y' + y = \lambda \cos(t)$ telle que $(f(0), f'(0)) = (0,0)$.
On pose $\Phi = f - g$.

C.1. Démontrer que Φ est solution de $(E_{\alpha,h})$ pour une fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant $h(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

C.2. On suppose dans cette question que $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $h(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.
Soit (t_n) une suite quelconque de $\mathbb{R}_+$ de limite $+\infty$. Démontrer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} |h(u)| \, du = 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^t |h| \underset{t \to +\infty}{=} o(t)$.

C.3. Utilisant la résolution de $(E_{\alpha,h})$ vue en III.B, montrer que $\Phi(t) \underset{t \to +\infty}{=} o(t)$.

C.4. Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ n'est pas stable par rapport au second membre au sens ∞.

III.D. **Stabilité par rapport au paramètre.**

On fixe pour la suite de la question $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $\beta \in]1, +\infty[$. On pourra supposer $\beta \geq \alpha$.
Soit f la solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant $(f(0), f'(0)) = (a,b)$, g la solution de $(E_{\beta,0})$ vérifiant $(g(0), g'(0)) = (a,b)$.
On pose $\Phi = f - g$.
Si $\lambda > 1$, on pose $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda}$ et $K(\lambda) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\lambda}$.
Comme pour I, les fonctions J et K sont bien définies et continues sur $]1, +\infty[$ (on ne demande pas de le montrer).

D.1. Démontrer que Φ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,h})$ avec

$$h : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^\alpha} - \frac{1}{1+t^\beta} \right) g'(t)$$

D.2. Démontrer que $h \in L^1$ et

$$\|h\|_1 \leq \|(a,b)\| e^{I(\beta)} \left(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right)$$

En déduire une majoration de $\|\Phi\|_\infty$.

D.3. Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV. Etude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$.

Cette partie utilise II.B.
f est une solution non nulle de $(E_{1,0})$.
On pose $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t+1}}$.

IV.A. Etablir que pour tout $t \geq 0$, $g''(t) + \left(1 - \dfrac{3}{4(1+t)^2}\right) g(t) = 0$.

IV.B. Démontrer qu'existent $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $g = \rho\cos(\beta)$ et $g' = \rho\sin(\beta)$.

IV.C. Déterminer une équation différentielle vérifiée par β et montrer que $\beta(x) + x$ tend vers une limite réelle lorsque $x \to +\infty$.

IV.D. Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ et démontrer que ρ tend vers une limite réelle $a > 0$ en $+\infty$.

IV.E. Démontrer qu'il existe un réel b tel que $f(t) - a\sqrt{t}\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{=} o(\sqrt{t})$, où a est le réel défini ci-dessus.

IV.F. Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie V. Etude de la stabilité pour $\alpha = 1$.

Cette partie utilise les parties IV et II.

V.A. Démontrer que $(E_{1,0})$ n'est pas stable par rapport aux conditions initiales et au paramètre.

V.B. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_\lambda : x \mapsto \lambda x \sin(x)$, calculer $f_\lambda''(x) - \dfrac{1}{1+x} f_\lambda'(x) + f_\lambda(x)$. Qu'en déduire concernant la stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞ ?

Option "soft" :

Partie I.A,B et C (A3 est compliqué mais pas difficile)
Partie II.A,B ; on peut faire II.C3 en admettant (ou en faisant) II.C2.
Partie III.B
Partie IV.A