n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
I_n désigne la matrice identité d'ordre n et pour toute matrice A, ${}^tA$ désigne la transposée de A.
Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On rappelle que pour toute matrice S symétrique réelle d'ordre n, il existe P appartenant à $O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle d'ordre n telles que $S = PDP^{-1}$.
$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(.|.)$ et de la norme associée notée $\|.\|$.
Une matrice S de $S_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geq 0.$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices positives de $S_n(\mathbb{R})$.
Dans tout le problème, S désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n.

PARTIE I -

Dans cette partie seulement, on suppose d'une part que $n \geq 2$ et d'autre part que S possède exactement deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de multiplicités respectives n_1 et n_2.

1/ 1.1/ Montrer qu'il existe un unique couple (P_1, P_2) de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{cases} I_n = P_1 + P_2 \\ S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases}$$

Expliciter les deux matrices P_1, P_2 en fonction de $S, I_n, \lambda_1, \lambda_2$ et montrer qu'elles sont symétriques.

1.2/ Si P est une matrice orthogonale telle que $P^{-1}SP = diag(\lambda_1, ...\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_2)$ (où λ_1 est répété n_1 fois et λ_2 est répété n_2 fois), exprimer P_1 (resp. P_2) en fonction de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale.
En déduire que $P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.
Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad S^k = \lambda_1^k P_1 + \lambda_1^k P_1$.

1.3/ Soit S_0 la matrice de $S_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 sauf les coefficients diagonaux qui valent 2. Vérifier que S_0 admet exactement deux valeurs propres et déterminer les matrices P_1 et P_2 associées.

2/ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si λ_1, λ_2 sont dans I, on définit la matrice $f(S)$ par

$$f(S) = f(\lambda_1)P_1 + f(\lambda_2)P_2.$$

On remarque que cette nouvelle fonction f est définie sur une partie de $S_n(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$.

2.1/ Calculer $\cos(\pi S_0)$ où S_0 est la matrice introduite au 1.3/.

2.2/ Soit $g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$. A quelle condition sur la matrice S peut-on définir $g(S)$?
Montrer qu'alors, $g(S) = S^{-1}$.

2.3/ Pour $\alpha > 0$, soit p_α la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$p_\alpha(x) = x^\alpha \text{ si } x > 0 \text{ et } p_\alpha(0) = 0,$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $A(x)$ et $B(x)$ les matrices définies par

$$A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix} \text{ et } B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \end{pmatrix}.$$

Pour $x \neq 0$, déterminer explicitement les matrices P_1, P_2 associées à $A(x)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad p_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)$.

Montrer que $p_\alpha(B(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^\alpha} \end{pmatrix}$.

PARTIE II -

Dans toute la suite du problème, on munit l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ d'une relation notée "$\leq$" définie par :

$$\forall (A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2, \quad (A \leq B \iff B - A \in S_n^+(\mathbb{R})).$$

Une fonction f de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$ définie comme au I-2/ est dite "croissante" si :

$$\forall (A, B), \quad (A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B))$$

et décroissante si :

$$\forall (A, B), \quad (A \leq B \Rightarrow f(B) \leq f(A)).$$

1/ Montrer que, si $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMSM \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2/ Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont dans $\mathbb{R}_+$.

3/ On suppose que $I_n \leq S$.
Démontrer que les valeurs propres de S sont dans $[1, +\infty[$, puis que S est inversible et que $S^{-1} \leq I_n$.

4/ On suppose que A et B sont deux matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ telles que A soit inversible et $A \leq B$.
On admet le résultat suivant : Il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$.
Déduire des questions II-1/ et II-3/ que $I_n \leq {}^t(M^{-1})BM^{-1}$ puis que B est inversible et que $B^{-1} \leq A^{-1}$.
On a donc démontré que la fonction g du I-2.2/ est décroissante.

5/ On reprend la fonction p_α de la question II-2.3/ et les matrices $A(x)$ et $B(x)$.
Démontrer que, pour tout réel x, $B(x) \leq A(x)$.
Calculer le déterminant $\Delta(x)$ de la matrice $p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))$ et donner un équivalent simple de $\Delta(x)$ au voisinage de 0.
En déduire que, dans le cas où $\alpha > 1$, la fonction p_α n'est ni croissante ni décroissante.