Notations et objectif

On désigne par $\mathscr{A}$ le $\mathbb{R}$- espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $\mathscr{B}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}$ des applications bornées sur $\mathbb{R}$, par $\mathscr{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$ des applications f continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On considère l'application linéaire $\mathscr{F}$ de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{A}$ définie par

$$f \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} f_1$$

où f_1 est définie par $f_1(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)dt$.

Après avoir justifié l'existence de f_1 dans le préliminaire, on étudie des exemples dans la partie I et quelques propriétés de f_1 dans la partie II. Un calcul de série de Fourier dans la partie III permet d'obtenir la somme d'une série numérique que l'on utilise dans la partie IV pour mettre en évidence une fonction propre pour $\mathscr{F}$.

Préliminaire

Justifier l'existence de l'intégrale

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)dt,$$

pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{S}$ et tout x réel.

Montrer que $\mathscr{F}$ est une application de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{B}$.

PARTIE I : Etude de deux exemples

1.1/ Premier exemple

On suppose que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(t) = 1$ si $t \in [-1,1]$ et $f(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$

1.1.1/ Expliciter $f_1(x)$ pour x réel.

On répondra aux questions 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4 en utilisant l'expression explicite de $f_1(x)$ obtenue à la question 1.1.1.

1.1.2/ La fonction f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

1.1.3/ L'intégrale $\int_0^{+\infty} f_1(x)dx$ existe-t-elle ?

1.1.4/ La fonction f_1 appartient-elle à $\mathscr{S}$?

1.2/ Deuxième exemple

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 1 + \cos t$ si $t \in [-\pi,\pi]$

$f(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi]$.

1.2.1/ Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

1.2.2/ Expliciter $f_1(x)$ pour x réel.

On répondra aux questions 1.2.3, 1.2.4 et 1.2.5 en utilisant l'expression explicite de $f_1(x)$ obtenue à la question 1.2.2.

1.2.3/ La fonction f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

1.2.4/ Quelle est la limite de $f_1(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) ?

1.2.5/ La fonction f_1 appartient-elle à $\mathscr{S}$?

PARTIE II : Quelques propriétés de f_1

Dans cette partie f désigne une fonction arbitraire appartenant à $\mathcal{S}$.

2.1/ On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1.

2.2/ On suppose dans cette question que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto tf(t)$ appartient à $\mathcal{S}$.

La fonction f_1 est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

2.3/ On suppose dans cette question que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2.3.1/ Montrer que la fonction f admet une limite que l'on précisera lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

2.3.2/ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\sin(xt)dt$$

existe et exprimer sa valeur en fonction de x et $f_1(x)$.

2.3.3/ On suppose de plus que la fonction f' appartient à $\mathcal{S}$. Quelle est la limite de $f_1(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

2.4/ Exemple : on suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ (où ch désigne la fonction cosinus hyperbolique).

2.4.1/ Montrer que la fonction f appartient à $\mathcal{S}$ et préciser la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

2.4.2/ Montrer que la fonction f' appartient à $\mathcal{S}$; préciser la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|dt$.

2.4.3/ Montrer que la fonction $t \mapsto t f(t)$ appartient à $\mathcal{S}$.

2.4.4/ Déduire de ce qui précède l'existence de la fonction $f_1 = \mathcal{F}(f)$.

2.4.5/ La fonction f_1 est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

PARTIE III : Étude d'une série de Fourier.

Dans cette partie, on désigne par α un nombre réel, par φ la fonction réelle de la variable réelle t, 2π périodique, impaire, définie sur $[0,\pi]$ par :

$$\varphi(t) = \operatorname{ch}(\alpha t) \text{ pour } t \in \,]0,\pi[\text{ et } \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

3.1/ Déterminer les coefficients de Fourier réels de φ.

3.2/ Justifier la convergence de la série de Fourier de φ en tout point de $\mathbb{R}$ et en préciser la somme.

3.3/ La convergence de la série de Fourier de φ est-elle normale sur $\mathbb{R}$?

3.4/ Exprimer $1 + \operatorname{ch}(\alpha\pi)$ en fonction de $\operatorname{ch}\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$.

3.5/ Soit $U_p(\alpha) = \dfrac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2 + \alpha^2}$. Déduire, des résultats obtenus en **3.2** et **3.4**, la convergence de la série $\sum U_p(\alpha)$ et la valeur de $\sum_{p=0}^{+\infty} U_p(\alpha)$.

PARTIE IV - Mise en évidence d'une fonction propre pour $\mathcal{F}$.

4.1/ On considère deux nombres réels β et γ et l'intégrale

$$I(\beta,\gamma)=\int_0^{+\infty} e^{\beta t}\cos(\gamma t)\ \mathrm{d}t.$$

4.1.1/ On suppose $\beta<0$. Etablir l'existence de $I(\beta,\gamma)$ et préciser sa valeur.

4.1.2/ On suppose $\beta\geq 0$. Etudier l'existence de $I(\beta,\gamma)$.

4.2/ On considère, pour t réel, la série de terme général :

$$v_k(t)=2(-1)^k e^{-(2k+1)t}.$$

4.2.1/ Déterminer l'ensemble E des valeurs réelles de t pour lesquelles la série $\sum v_k(t)$ est convergente.

4.2.2/ Exprimer, pour t appartenant à E , la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k(t)$ en fonction de $\operatorname{ch} t$.

Dans toute la suite du problème, on désigne par c l'application paire et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $c(t)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k(t)$ pour tout t appartenant à E.

4.2.3/ Démontrer, pour tout α réel, t appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ et p entier naturel, les inégalités suivantes :

$$\left|\sum_{k=p+1}^{+\infty} v_k(t)\cos(\alpha t)\right|\leq|\cos(\alpha t)|.|v_{p+1}(t)|\leq|\cos(\alpha t)|.|v_0(t)|,\qquad \text{et ,}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{p} v_k(t)\cos(\alpha t)\right|\leq|\cos(\alpha t)|.|c(t)|+|\cos(\alpha t)|.|v_0(t)|.$$

4.2.4/ En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout α réel, la série $\sum\int_0^{+\infty} v_k(t)\cos(\alpha t)\ \mathrm{d}t$ est convergente et que l'on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} v_k(t)\cos(\alpha t)\ \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} c(t)\cos(\alpha t)\ \mathrm{d}t.$$

4.2.5/ Déduire des résultats obtenus en **3.5/**,**4.1/** et **4.2.4/** qu'il existe une constante réelle ρ que l'on précisera telle que l'on ait l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} c(t)\cos(\alpha t)\ \mathrm{d}t=\rho\frac{1}{\operatorname{ch}(\rho\alpha)}\quad \text{pour tout } \alpha \text{ réel.}$$

4.3/ En utilisant le résultat obtenu en **4.2.5/**, expliciter une "fonction propre" pour l'application linéaire $\mathcal{F}$, c'est à dire une fonction f non identiquement nulle appartenant à $\mathcal{C}$ et telle que $\mathcal{F}(f)=\lambda.f$ pour un réel λ que l'on précisera.