NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Les deux parties sont très largement indépendantes.

PARTIE I - QUELQUES APPLICATIONS DES MATRICES DE GRAM À LA GÉOMÉTRIE

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ et on note $(\ |\ )$ un produit scalaire sur E et $\|\ \|$ la norme associée.

Si $x_1, x_2, ..., x_p$ sont p vecteurs de E, on appelle matrice de GRAM de $x_1, x_2, ..., x_p$, notée $G(x_1, x_2, ..., x_p)$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de terme général $(x_i \mid x_j)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$:

$$G(x_1, x_2, ..., x_p) = \begin{pmatrix} (x_1 \mid x_1) & (x_1 \mid x_2) & ... & (x_1 \mid x_p) \\ (x_2 \mid x_1) & . & ... & . \\ . & & & \\ . & . & ... & . \\ . & & & \\ (x_p \mid x_1) & . & ... & (x_p \mid x_p) \end{pmatrix}$$

on notera $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_p)$ son déterminant : $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_p) = \det G(x_1, x_2, ..., x_p)$ dit "déterminant de Gram".

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, le noyau de A est, par définition,

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Par ailleurs, on note :
pour n entier $n \geq 2$, E_n l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique à la fois considéré comme espace vectoriel euclidien et espace affine euclidien.

A-GÉNÉRALITÉS

1. Résultat préliminaire

a. Que peut-on dire d'une matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tY\,Y = 0$?

b. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Ker}\,({}^tA\,A) \subset \mathrm{Ker}\,A$ puis en déduire que $\mathrm{rang}\,({}^tA\,A) = \mathrm{rang}\,A$.

2. On donne $x_1, x_2, ..., x_p$ p vecteurs de E.
Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E, et si A est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$ dans la base $\mathcal{B}$, montrer que $G(x_1, x_2, ..., x_p) = {}^tA\,A$.
Quel lien existe entre le rang de la matrice $G(x_1, x_2, ..., x_p)$ et le rang de la famille de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_p)$?

3. Dans cette question, $p = n$.

   a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_n)$ pour que la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ soit liée.

   b. Montrer que la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre si, et seulement si, $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$.

4. Application

   L'angle géométrique d'un couple (u,v) de vecteurs non nuls de E_n est le réel $\alpha \in [0, \pi]$ vérifiant : $\cos \alpha = \dfrac{(u \mid v)}{\|u\| \, \|v\|}$.

   Si A, B et C sont trois points de E_3 situés sur la sphère de centre O et de rayon 1, si on désigne par α, β et γ l'angle géométrique des couples respectifs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, montrer en utilisant une matrice de GRAM que :

$$1 + 2\cos\alpha \ \cos\beta \ \cos\gamma \geq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma .$$

   Que se passe-t-il dans le cas où les points A, B et C sont sur un même cercle ?

5. Interprétation géométrique de la matrice de GRAM

   a. Si a, b et y sont trois vecteurs de E tels que le vecteur a soit orthogonal à la fois au vecteur b et au vecteur y, trouver une relation entre les déterminants $\Gamma(a+b, y)$, $\Gamma(a, y)$ et $\Gamma(b, y)$.

   b. Si (x, y) est une famille libre de deux vecteurs de E_2, si $F = \mathrm{vect}\{y\}$ et si z est le projeté orthogonal du vecteur x sur F, montrer que $\Gamma(x, y) = \Gamma(x - z, y)$.

   c. En déduire que si A, B et C sont trois points non alignés de E_2, $\dfrac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ est l'aire du triangle ABC (donc, $\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ est l'aire du parallélogramme « formé par A, B et C »).

B- POINTS ÉQUIDISTANTS SUR UNE SPHÈRE EUCLIDIENNE

Dans cette partie, m est un entier naturel, $m \geq 2$, et t est un réel, $t \neq 1$.
La famille de m vecteurs distincts $(x_1, x_2, ..., x_m)$ de l'espace E, de dimension $n \geq 2$, est solution du problème $P(m, t)$ si :

tous les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_m$ sont de norme 1

et

pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et m, $(x_i \mid x_j) = t$.

6. Résultats préliminaires

   a. Montrer que si $(x_1, x_2, ..., x_m)$ est solution du problème $P(m, t)$ alors, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et m, $\|x_i - x_j\|$ est constant.

   b. Sans aucun calcul de déterminant, donner en le justifiant, le polynôme caractéristique de la matrice $J \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

   c. En déduire que si $(x_1, x_2, ..., x_m)$ est solution du problème $P(m, t)$, alors $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_m) = (1-t)^{m-1}(1+(m-1)t)$.

7. Conditions nécessaires

   a. Montrer que, pour que $(x_1, x_2, ..., x_m)$ soit une famille libre de vecteurs solution du problème $P(m, t)$, il est nécessaire que $t \in \left]\dfrac{-1}{m-1}, 1\right[$ et que $m \leq n$.

   b. Montrer que, pour que $(x_1, x_2, ..., x_m)$ soit une famille liée de vecteurs solution du problème $P(m, t)$, il est nécessaire que $t = \dfrac{-1}{m-1}$ et que $m \leq n+1$ (on pourra montrer qu'alors, la famille $(x_1, x_2, ..., x_{m-1})$ est libre).

   c. Application

   Existe-t-il dans E_3 quatre vecteurs distincts qui deux à deux forment un même angle obtus θ, c'est-à-dire tel que $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$?

C-CALCUL DE DISTANCE

Soit q un entier supérieur ou égal à 2.

8- a- Montrer que $\Gamma(x_1, ..., x_q)$ est invariant si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres.

b- On note L le sous espace vectoriel engendré par $(x_1, ..., x_q)$ et $p_L(x_1)$ la projection orthogonale de x_1 sur L, puis on pose $h_1 = x_1 - p_L(x_1)$.
Montrer que $\Gamma(x_1, ..., x_q) = \|h_1\|\Gamma(x_2, ..., x_q)$.

c- Déduire de 8-b- une expression de la distance $d(x_1, L)$ du vecteur x_1 au sous-espace L en utilisant uniquement des déterminants de Gram.

d- Déduire de 8-b- que $\forall q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\forall (x_1, ..., x_q) \in E^q$, $\Gamma(x_1, ..., x_q) \leq \Gamma(x_1)\Gamma(x_2, ..., x_q)$, puis que $\forall q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\forall (x_1, ..., x_q) \in E^q$, $\Gamma(x_1, ..., x_q) \leq \prod_{i=1}^{q} \Gamma(x_i)$.

PARTIE II - VALEURS SINGULIERES D'UNE MATRICE

On rappelle que, d'après la question 1-a-, si A est une matrice de rang r, la matrice $G =^t AA$ est aussi une matrice de rang r.
On va dans cette partie utiliser la matrice $G =^t AA$ pour obtenir une factorisation de la matrice A.
On note $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
$Diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ désigne la matrice carrée diagonale d'ordre n dont les éléments diagonaux sont $a_1, ..., a_n$.
Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, on note $Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ la matrice dont les vecteurs colonnes ont pour coefficients les coordonnées de $(f(e_1), ..., f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}'$.

A-ETUDE D'UN EXEMPLE

9- Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et $G =^t AA$.
$\mathbb{R}^3$ identifié à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.

a- Déterminer le rang r de A et calculer G.

b- Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telles que $G = PD^tP$.
Déterminer P et D en choisissant $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

c- On note $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2, X_3)$ la famille dans $\mathbb{R}^3$ des vecteurs colonnes de P.
Soit $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \sigma_3 = \sqrt{\lambda_3}, Y_1 = \dfrac{AX_1}{\sigma_1}, Y_2 = \dfrac{AX_2}{\sigma_2}$ et $Y_3 \in \mathbb{R}^3$.
Calculer Y_1, Y_2 ; vérifier que (Y_1, Y_2) est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et déterminer Y_3 tel que $\mathcal{B}_2 = (Y_1, Y_2, Y_3)$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

d- Montrer que $Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = Diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et que A se factorise sous la forme $A = PDiag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)Q$ où Q est une matrice orthogonale qu'on précisera.

B-CAS GENERAL

On fixe un entier n, $n \geq 2$, une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et on pose $r = rang(A)$.
On note f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A et $G =^t AA$.

10- a- Démontrer que G est une matrice symétrique.

b- Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et D diagonale telles que $G = PD^tP$.
On pose $D = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

c- Démontrer que D possède exactement r termes diagonaux non nuls.
On suppose dans la suite que $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont non nuls et donc

$$\lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0.$$

d- En utilisant $G = PD^tP$, démontrer qu'on peut écrire D sous la forme ${}^tMM$ avec $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

e- Démontrer que $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, +\infty[$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle "valeurs singulières de A" les n nombres σ_i définis par $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

11- a- Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (X_1, ..., X_n)$ telle que :

- Pour tout entier $i \in [\![1, r]\!]$, ${}^tAAX_i = \lambda_i X_i$;
- $(X_{r+1}, ..., X_n)$ soit une base de $\ker(f)$.

b- Démontrer que la famille $(AX_1, ..., AX_r)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, puis que c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c- Pour tout entier $i \in [\![1, r]\!]$, calculer $\|AX_i\|$.

d- Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = Diag(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

e- Démontrer qu'il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que

$$A = P_1 Diag(\sigma_1, ..., \sigma_n) P_2.$$