Notations.

- Etant donné un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on note $\det(l)$ son déterminant, $\mathrm{tr}(l)$ sa trace et χ_l son polynôme caractéristique. En notant id l'endomorphisme identité, on définit $l^0 = id$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $l^{k+1} = l \circ l^k$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Objectifs.

Etant donné un vecteur non nul u et un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on définit un entier $r(l, u)$ à partir des itérées du vecteur par l'endomorphisme. Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme, liées à la valeur de l'entier $r(l, u)$.
Dans la première partie, on traite un exemple dans le cas élémentaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On obtient les coordonnées des itérées d'un vecteur par l'endomorphisme.
Dans la deuxième partie, on fait établir des résultats généraux sur les endomorphismes étudiés.
Dans la troisième partie, on étudie le cas des endomorphismes nilpotents.
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Première partie.

Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < \pi$ et $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$. On considère l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ rapporté à une base orthonormale $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Etant donné deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$, on note $(u|v)$ leur produit scalaire et $\|u\|$ la norme du vecteur u.
On définit les vecteurs $v_1 = \varepsilon_1$ et $v_2 = \cos(\theta)\varepsilon_1 + \sin(\theta)\varepsilon_2$ et on considère la base $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
Soit l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{V}$.

I.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l. En déduire les valeurs propres réelles ou complexes de l.

I.2. Soit $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\|v\|^2$ et $\|l(v)\|^2$. En déduire que l est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$.

I.3. Déterminer la matrice de passage P de la base ε à la base $\mathcal{V}$ ainsi que la matrice inverse P^{-1}. On note M' la matrice de l'endomorphisme l relativement à la base ε. Exprimer M' en fonction des matrice P, P^{-1} et M. Donner l'expression de M' et caractériser l'endomorphisme l.

I.4. Le vecteur v_2 vérifie $l(v_1) = v_2$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, on définit les vecteurs v_k par $v_k = l(v_{k-1})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = a_k v_1 + b_k v_2$.

I.4.1 En calculant $\|v_k\|^2$ de deux façons, déduire de I.2 une relation entre a_k, b_k et $\cos(\theta)$.

I.4.2 Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(v_1|v_k) = \cos((k-1)\theta)$; en déduire la valeur de $(v_2|v_k)$.

I.4.3 En utilisant les produits scalaires $(v_1|v_k)$ et $(v_2|v_k)$, donner un système linéaire de deux équations à deux inconnues a_k et b_k. Montrer que

$$a_k = -\frac{\sin((k-2)\theta)}{\sin(\theta)} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Deuxième partie.

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ avec $n \geq 2$ et l est un endomorphisme de E.

II.1. Soit u un vecteur non nul de E.

II.1.1. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de $k+1$ vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. On note $r(l, u)$ ce plus petit entier.

II.1.2. Justifier l'encadrement $1 \leq r(l,u) \leq n$.

II.1.3. Montrer que $r(l,u) = 1$ si et seulement si u est un vecteur propre de l. Montrer que $r(l,u) = n$ si et seulement si la famille $(u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$ est une base de E.

II.2. Un exemple.

Dans cette question, on suppose $n = 4$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

II.2.1. Calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$.

II.2.2. Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre.

II.2.3. Déterminer trois réels x, y, z tels que $f^3(e_1) = xf^2(e_1) + yf(e_1) + ze_1$. En déduire $r(f, e_1)$.

On reprend le cas général où E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et l un endomorphisme de E. Soit u un vecteur non nul de E.

II.3. On suppose $n = r(l,u)$. D'après II.1.3, la famille $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$ est une base de E. On note $l^n(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.

II.3.1. Déterminer la matrice $Mat_{\mathcal{B}(u)}(l)$ de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathcal{B}(u)$. Calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$

II.3.2. Déterminer $\chi_l(\lambda) = \det(l - \lambda id)$, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme l (on pourra calculer ce déterminant en ajoutant à la première ligne une combinaison linéaire des autres lignes, opération codée $L_1 \leftarrow L_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda^{i-1} L_i$ où L_i est la ligne d'indice i).

II.4. On reprend l'exemple de II.2 et on note F_{e_1} le sous-espace de E ayant pour base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$.

II.4.1. Montrer que F_{e_1} est stable par f.

On note f_F l'endomorphisme de F_{e_1} induit par f. Montrer que f_F n'a pas de polynôme annulateur de degré 2.

II.4.2. En utilisant II.2.3, déterminer un polynôme P de degré 3 tel que $P(f)(e_1) = 0$.

II.4.3. Montrer que P est annulateur de f_F.

En déduire sans calculer de déterminant les valeurs propres de f_F puis celles de f.

II.4.4. Prouver sans calcul que f n'est pas diagonalisable.

II.5. On suppose que l'endomorphisme l est diagonalisable. Soit $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ une base de vecteurs propres avec pour tout $k \in [1, n]$, $l(w_k) = \lambda_k w_k$.

II.5.1. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u tel que $r(l,u) = n$ et on considère la base de E : $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$. On note $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i w_i$. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{B}(u)$. En déduire que les valeurs propres de l sont toutes distinctes.

II.5.2. On suppose que les valeurs propres λ_i de l sont toutes distinctes.

II.5.2.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et on note $C = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne telle que $AC = 0$. Montrer que le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est nul. En déduire que A est inversible.

II.5.2.2 Montrer qu'il existe un vecteur u non nul tel que $r(l,u) = n$.

Troisième partie.

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ avec $n \geq 2$, l est un endomorphisme de E et on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $l^p = 0$.

III.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l.

III.2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe un vecteur non nul u tel que $r(l, u) = n$

(2) $l^{n-1} \neq 0$

III.3. On suppose dans cette partie que $l^{n-1} = 0$ et que $l \neq 0$.

III.3.1 Justifier qu'il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $l^k = 0$. On note $i(l)$ ce plus petit entier et on a donc : $2 \leq i(l) \leq n - 1$.

III.3.2 Montrer que $r(l, u) \leq i(l)$ pour tout vecteur u de E et qu'il existe un vecteur u tel que $r(l, u) = i(l)$.

Dans toute la suite de cette question, on choisit un tel u et on note F_u le sous-espace de E ayant pour base $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \ldots, l^{i(l)-1}(u))$.

III.3.3 Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi \circ l^{i(l)-1}(u) \neq 0$.

Dans toute la suite de la question III.3, φ désigne une telle forme linéaire.

III.3.4 On note $q = n - i(l)$ (et on a $1 \leq q \leq n - 2$).

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^{i(l)}$ qui à un vecteur x de E associe

$$\Psi(x) = (\varphi(x), \varphi \circ l(x), \varphi \circ l^2(x), ..., \varphi \circ l^{i(l)-1}(x))$$

et G le noyau de Ψ.

III.3.4.1 En étudiant l'image par Ψ de $\mathcal{B}(u)$, déterminer le rang de Ψ.

Montrer que G est un supplémentaire de F_u dans E.

III.3.4.2 Montrer que G est stable par l.

III.3.5 On note maintenant F_u l'espace engendré par $(u, l(u), \ldots, l^{k-1}(u))$ pour tout vecteur u et tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $l^{k-1}(u) \neq 0$ et $l^k(u) = 0$. On obtient ainsi des sous-espaces F_u de dimension 1 si $l(u) = 0$ et $u \neq 0$ et les sous-espaces F_u (de dimension au moins 2) introduits au III.3.2.

Montrer qu'il existe un entier p et p vecteurs $u_1, ..., u_p$ tels que $E = F_{u_1} \oplus F_{u_2} \oplus ...F_{u_p}$.

Soit alors $\mathcal{B}$ la base de E déduite des bases $\mathcal{B}(u_k)$ où $k = 1..p$.

Quelle est la matrice de l dans la base $\mathcal{B}$?