Dans tout le problème, on notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Question préliminaire

Démontrer que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que a soit strictement positif et tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction

$$t \mapsto t^p e^{-(at^2+bt+c)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. (On attend une démonstration détaillée)

Partie I-

A-

A.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $(x \mapsto x^n f(x))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $m_n(f) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\, dx$.

On admettra dans toute la suite de ce problème que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$.

A.2) Déterminer m_1.

A.3) Lorsque $n \geq 2$, donner une relation de récurrence liant m_n et m_{n-2}. En déduire une expression de m_n en fonction de n.

B- Montrer pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'existence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\, dx$.

Déterminer sa valeur en fonction de t en utilisant le changement de variable défini par $u = x + t$.

C- Le réel t étant fixé, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-tx)^k}{k!} f(x)$.

C.1) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n(x)$.

C.2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |S_n(x)| \leq e^{|tx|} f(x)$.

C.3) En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}.$$

C.4) Retrouver la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\, dx$ obtenue précédemment.

Partie II-

Dans toute la suite du problème, on note E l'ensemble des fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif $M(g)$ et un réel strictement positif λ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leq M(g) f(\lambda x).$$

A-

A.1) Soit $(u, v) \in E^2$. Justifier l'existence d'un réel strictement positif α et de $(M(u), M(v)) \in \mathbb{R}_+^2$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u(x)| \leq M(u) f(\alpha x) \text{ et } |v(x)| \leq M(v) f(\alpha x).$$

A.2) Démontrer que E muni des lois $+$ et $\cdot$ usuelles est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel qui contient f.

B- Soient u et v deux éléments de E. On note $u \star v$ l'application définie, pour tout x réel tel que la formule ait un sens, par :

$$(u \star v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t) v(x - t)\, dt.$$

B.1) Démontrer que $u \star v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

B.2) Démontrer que $u \star v = v \star u$.

B.3) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f \star f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

B.4) Démontrer que $u \star v \in E$. On utilisera le résultat de la question précédente et A.1).

C- Soit $u \in E$. Dans toute la suite du problème, on définit l'application $\widehat{u}$ par :

$$\widehat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} u(x)\, \mathrm{d}x,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel l'intégrale a un sens.
Montrer que $\widehat{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

D- Soient u et v deux éléments de E.

D.1) Justifier l'existence d'un réel strictement positif α et de $C \in \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (\theta, t, x) \in \mathbb{R}^3,\ |e^{-x\theta} u(t) v(x-t)| \leq C e^{-x\theta - \frac{\alpha^2}{3}t^2 - \frac{\alpha^2}{8}x^2}.$$

On pourra utiliser A.1)

D.2) On admet le résultat suivant :
Si f est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et h_1, h_2 deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ intégrables sur $\mathbb{R}$, alors la "condition de domination" :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,t)| \leq h_1(x) h_2(t)$$

est suffisante pour que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

Démontrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \widehat{u \star v}(\theta) = \widehat{u}(\theta).\widehat{v}(\theta)$.

Partie III-

Dans toute la suite du problème, E_1 désigne le sous ensemble de E dont les éléments sont les fonctions $h \in E$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h = 1$.

A toute fonction $h \in E_1$, on associe la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$h_1 = h \ \text{ et } \ \forall n \geq 2,\ h_n = h_{n-1} \star h.$$

Si $h \in E_1$, on note $M_{2,1} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 h(x)\, \mathrm{d}x$. ($M_{2,1}$ existe d'après la Question préliminaire)

A- Soit $h \in E_1$.

A.1) Démontrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est bien définie et qu'elle est à termes dans E_1. (On utilisera les résultats de la Partie II)

A.2) Exprimer, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x)$ en fonction de $\widehat{h}(x)$ et de n.

B- Dans cette question, on étudie le cas particulier $h = f$. On remarque que $f \in E_1$ est vrai.

B.1) Déterminer l'expression de $\widehat{f}(t)$ en fonction de t.

B.2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{\frac{M_{2,1} t^2}{2}}$.

C- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2}\cos x & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

C.1) Démontrer que $g \in E_1$.

C.2) Déterminer l'expression de $\widehat{g}(t)$ en fonction de t.

C.3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{\frac{M_{2,1}t^2}{2}}$.

Partie IV-

Soit h un élément de E_1. On note pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$M_{1,n} = \int_{\mathbb{R}} x h_n(x)\,\mathrm{d}x\ ,\ M_{2,n} = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2$$

A-

A.1) Soit $u \in E$. Démontrer que $\widehat{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $\widehat{u}'(t)$ et $\widehat{u}"(t)$ à l'aide d'intégrales.

A.2) Montrer que la fonction $\widehat{h_n}$ possède un développement limité en 0 à l'ordre 2 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{1,n}$ et $M_{2,n}$.

A.3) En déduire que $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

B- On suppose dans cette question que la fonction h est telle que $M_{1,1} = 0$. Déterminer la limite de la suite $\left(\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)$.