Problème 1

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

Une définition. Soit $k \in [0;1[$. On dira qu'une application $f : E \to E$ est une **contraction stricte** de rapport k lorsque pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k \|x - y\| .$$

Une notation. Pour n entier naturel et $f : E \to E$, on notera $f^n : E \to E$ l'application définie par :

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois la fonction } f}(x) \quad \text{avec la convention} \quad f^0 = \mathrm{Id}.$$

Partie I : Le théorème du point fixe de Picard

Dans cette partie $(E, \| \ \|)$ est $\mathbb{R}$ muni de $| \cdot |$ et $f : E \to E$ est une contraction stricte de rapport k.

Pour $a \in E$ on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier naturel.

1. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = x_{n+1} - x_n$.
   (a) Démontrer que pour tout n entier naturel, on a $|u_{n+1}| \leqslant k\, |u_n|$ puis que
   $$|u_n| \leqslant k^n\, |f(a) - a| .$$
   En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Démontrer alors que la suite (x_n) converge vers un nombre ℓ de $\mathbb{R}$.
   (c) Prouver que ℓ est un point fixe de f c'est-à-dire que $f(\ell) = \ell$.
   (d) Démontrer que f admet en fait un unique point fixe.

Plus généralement, on admet le théorème du point fixe de Picard :

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \| \ \|)$, une application $f : E \to E$ qui est une contraction stricte admet un unique point fixe et pour tout a dans E la suite des itérés $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

Partie II : Exemples et contre-exemples

2. **Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte**
   On considère ici la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$
   (a) Démontrer que pour tout t réel, on a $|g'(t)| < 1$. En déduire que l'on a pour x et y réels :
   $$|g(x) - g(y)| < |x - y| .$$
   (b) La fonction g admet-elle un point fixe ? Est-elle une contraction stricte ?

3. **Un exemple**
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout x réel, on ait :
   $$f(x) = f \circ g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{x}{5} + 1.$$
   (a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 1$ pour tout n entier naturel. Démontrer en utilisant le théorème de Picard que cette suite converge vers un réel ℓ que l'on précisera.
   (b) Démontrer que pour tout n entier naturel et tout x réel, on a : $f(g^n(x)) = f(x)$.
   (c) En déduire que f est constante.

4. **Un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$**
   On s'intéresse dans cette question au système :
   $$(S) \begin{cases} 4x &= \sin(x+y) \\ 3y &= 3 + 2\arctan(x-y) \end{cases}$$
   On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :
   $$\psi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$
   (a) Prouver que $\mathbb{R}^2$ muni de l'application $\| \ \|_1$ définie par :
   $$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$$
   est un espace vectoriel normé.
   (b) Démontrer que pour tout a et b réels, on a :
   $$|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a| \quad \text{et} \quad |\arctan b - \arctan a| \leqslant |b - a| .$$
   (c) Prouver que ψ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$.
   (d) En déduire que le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.
   (e) Ici $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.
   Déterminer $\left\|\psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0,0)\right\|_\infty$.
   L'application ψ est-elle encore une contraction stricte pour la norme $\| \ \|_\infty$?
   Quel commentaire peut-on faire ?

Problème 2

Notations :

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels; $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls; $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Partie I : Etude de la fonction Γ.

Dans cette partie $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\, dt$ existe. On la note $\Gamma(x)$.
2. Déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ et en déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\Gamma(n)$.
3. On admet que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)$.
   (a) En déduire que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\, n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.
   (b) Démontrer que $\forall x \in]0,1[,\quad \dfrac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\right)$.
   On peut en déduire la relation $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi x}{\sin(\pi x)}$ pour tout $x \in]0,1[$. On admettra cette relation.

Partie II : Relation entre les fonctions Γ et β.

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha(a,b) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\theta . \cos^{2b-1}\theta\, \mathrm{d}\theta$ et $\beta(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, \mathrm{d}t$.

1. (a) Prouver l'existence des intégrales $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$.
   Comparer $\beta(b,a)$ et $\beta(a,b)$. Trouver une relation entre $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$.

   (b) On admet que, pour $a \geq 1/2$ et $b \geq 1/2$,
   $$\Gamma(a+b)\beta(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b).$$
   Etablir pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ une relation entre $\beta(a,b)$ et $\beta(a+1,b)$ puis entre $\beta(a,b)$ et $\beta(a+1,b+1)$.
   En déduire que la relation admise est encore valable pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. On cherche à calculer $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\, \mathrm{d}t$.
   (b) Prouver que $\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(1/2) = \dfrac{\pi(2n)!}{4^n n!}$.
   (c) En déduire $\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

Partie III : Trois exemples d'utilisation des résultats des parties I et II.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{7/4}\, dt$.
2. (a) Soit m, p, r des réels positifs ou nuls.
   On note $I = \displaystyle\iint_D x^m y^p (1-x-y)^r\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
   Exprimer I à l'aide de la fonction Γ et des réels m, p, r.
   (b) Que devient cette expression de I lorsque m, p, r sont des entiers naturels?
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On définit une suite a par $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^p)^n\, \mathrm{d}t$.
   (a) Prouver que pour $n \geq 1,\quad a_n = np(a_{n-1} - a_n)$.
   (b) En déduire une expression de a_n en fonction de n et p ne comportant pas de signe intégrale.
   (c) Etablir que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma(1/p)}{p\, n^{1/p}}$.