Exercice

1) Soient a et b deux réels, $a < b$, et soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.
Montrer que :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx.$$

2) Soit g l'application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Démontrer que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad |g''(x)| \leq \frac{7}{4x^{3/2}}.$$

On admet que $x \mapsto \int_1^x |g''(t)|\, dt$ admet une limite en $+\infty$.

3) Pour n entier naturel non nul on pose :

$$u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}},\ v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx,\ w_n = v_n - \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

a) Montrer que w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 2\cos 1 - 2\cos\sqrt{n+1}.$$

Prouver que la suite $(\cos n)$ n'est pas convergente.
En déduire la nature de la série de terme général v_n.

c) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

L'objet du problème est l'étude de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

On rappelle que, pour tous entiers m, n vérifiant $m \leq n$, on note $[\![m,n]\!]$ l'intervalle d'entiers

$$[\![m,n]\!] = \{p \in \mathbb{Z} \mid m \leq p \leq n\}$$

Première partie

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$: $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$. Rappeler la formule permettant de calculer la somme $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ des racines de P en fonction de ses coefficients a_k, $k \in [\![0,n]\!]$.

2. a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Démontrer l'égalité

$$\sin\left((2p+1)\varphi\right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où $\binom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binômial pour $k \in [\![0,p]\!]$.

b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \not\equiv 0[\pi]$, on a

$$\sin\left((2p+1)\varphi\right) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2 \varphi\right)^{p-k}$$

où $\operatorname{cotan} \varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$. Calculer $P(\gamma_k)$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.

b) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le réel $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que le polynôme P possède p racines distinctes, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4. a) Démontrer, pour tout réel $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, les encadrements

$$0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$$

b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, on a l'encadrement

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

c) Démontrer que $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ défines par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

sont convergentes et déterminer les valeurs exactes de leurs limites, respectivement notées U, V et W.

Deuxième partie

Pour tout entier $n \geq 1$, on note D_n le *noyau de* DIRICHLET, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a

$$D_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note L_n l'intégrale

$$L_n = \int_0^{\pi} x D_n(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier $k \geq 1$.

b) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k^2}$$

3. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0,\pi]$ par : $x \to \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.

4. Soit $\phi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\phi(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$$

5. a) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$.

b) Retrouver la valeur de S.

Troisième partie

L'objet de cette partie est de calculer la limite de la somme double

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

On pose, pour tout entier $N\geq 1$, $H_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$

1. a) Démontrer que pour tout entier $N\geq 1$, on a : $\ln(1+N)\leq H_N\leq 1+\ln(N)$

b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty}\frac{H_N}{N}=0$

c) Démontrer que pour tout entier $M\geq 2$, on a :

$$\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M}$$

d) En déduire que la série $\sum\frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. Pour tous entier $N\geq 1$ et pour tout entier $m\geq 2$, on pose

$$Z_{N,m}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)}$$

a) Démontrer que pour tout entier $m\geq 2$ et si $N\geq m$,

$$Z_{N,m}=\frac{1}{m-1}\left(H_{m-1}-\sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)$$

b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty}Z_{N,m}=\frac{H_{m-1}}{m-1}$

3. a) Montrer que pour tout entier $N\geq 1$ et pour tout entier $M\geq 2$ on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}$$

b) Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{m=2}^{M}\frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$$

c) En déduire alors

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$