**Problème I**

Dans tout le problème, on identifie un vecteur de $\mathbb{C}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ avec sa matrice de la base canonique.

Par exemple, le vecteur $v = (1, 2, 3)$ de $\mathbb{C}^3$ est identifié à la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

A. Etude d'un cas particulier :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Prouver qu'il existe une matrice inversible $P$ et une seule, de la forme $P = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & 1 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5$ telle que $AP = PT$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Calculer $T^n$ ; en déduire $A^n$ en fonction de $n$, $B$, $P$ où $B = T - 2I_3$

3) Soit $X_0 \in \mathbb{C}^3$ donné et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \dfrac{1}{2} A X_n$.

Expliciter les coefficients de $X_n$ au moyen de $n$, $B, P, X_0$. A quelle condition portant sur $X_0$ la suite $(X_n)$ est-elle convergente ? Quelle est alors sa limite ?

*On a prouvé dans cette question qu'une certaine matrice $A$ est semblable à la matrice triangulaire $T$ puis on a utilisé la relation entre $A$ et $T$.*

B. Généralisation :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On va prouver la propriété $\Pi_p$ suivante :

"Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$, il existe une matrice $T \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et une matrice $P \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ inversible (donc $P \in GL_p(\mathbb{C})$) telle que $AP = PT$ (donc $A$ est semblable à une matrice triangulaire)."

On admet le lemme suivant :

(LEM) : Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$, il existe $(\lambda, V) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ tel que $AV = \lambda V$ et $V \neq 0_{\mathbb{C}^p}$.

1) Justifier $\Pi_p$ pour $p = 1$ ~~et $p = 2$~~.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ canoniquement associé à $A$.

Dans toute cette question, $p \geq \cancel{3}$ 2

a) Soit $(\lambda, V) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ introduit dans (LEM). Justifier l'existence d'une base de $\mathbb{C}^p$ de la forme $B = (V, U_2, U_3, ..., U_p)$.

Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ vers la base $B$ et $A' = P^{-1}AP$.

Justifier que $A'$ admet une décomposition par blocs de la forme $A' = \begin{pmatrix} (\lambda) & A'_2 \\ 0_{p-1,1} & A'_4 \end{pmatrix}$

(donc $A'_4 \in \mathscr{M}_{p-1,p-1}(\mathbb{C})$).

b) Soit $A' = \begin{pmatrix} (\lambda) & A'_2 \\ 0_{p-1,1} & A'_4 \end{pmatrix}$. On suppose qu'il existe une matrice $T_4$ triangulaire supérieure d'ordre $p-1$ et une matrice $Q_4$ inversible d'ordre $p-1$ telles que $A'_4 Q_4 = Q_4 T_4$. Démontrer qu'il existe une matrice $T$ triangulaire supérieure d'ordre $p$ et une matrice $Q$ inversible d'ordre $p$ telles que $A'Q = QT$. On précisera les expressions (par blocs) de $T$ et de $Q$.

3) Déduire de ce qui précède que la propriété $\Pi_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

**Problème II**

Pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $\mathscr{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices réelles à $p$ lignes et $p$ colonnes, et l'on désigne par $I_p$ la matrice unité (ou identité) de $\mathscr{M}_p$. Soit $M \in \mathscr{M}_p$, on note $\underline{M}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice $M$ dans la base canonique. La transposée d'une matrice $M$ est notée ${}^tM$. On note $(\,|\,)$ le produit scalaire canonique et $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^p$.

On rappelle que, si $x, y$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$ associés aux matrices colonnes $X, Y$, le produit scalaire $(x|y)$ est l'unique élément de la matrice ${}^tXY$ et que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est une famille libre.

Pour tout entier pair $p = 2m$, on considère la matrice $J \in \mathscr{M}_{2m}$ définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On fixe l'entier pair $n = 2m$. On appelle *matrice symplectique* toute matrice $M \in \mathscr{M}_{2m}$ telle que

$${}^tMJM = J.$$

   a) Calculer ${}^tJ, J^2, J^{-1}$.
   Prouver que, si $M$ est symplectique, $M$ est inversible et que $M^{-1}$ et ${}^tM$ sont semblables.

   b) L'ensemble des matrices symplectiques est-il un groupe pour la multiplication ?

   c) La matrice $J$ est-elle symplectique ?

   d) La transposée d'une matrice symplectique est-elle symplectique ?

2. On écrit toute matrice $M \in \mathscr{M}_{2m}$ par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A, B, C, D \in \mathscr{M}_m$.

   a) Montrer que la matrice est symplectique si et seulement si les matrices $A, B, C, D$ vérifient les conditions

$$\begin{cases} {}^tAC \text{ et } {}^tBD \text{ sont symétriques,} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m. \end{cases}$$

   b) Montrer que si $D$ est inversible, il existe $Q \in \mathscr{M}_m$ telle que $M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$.
   Calculer ${}^t(A - QC)D$.
   *Pour les 5/2 : Déduire de ce qui précède que, si $M$ est symplectique et $D$ inversible, alors* $\det M = 1$.

   c) Soient $B, D \in \mathscr{M}_m$ telles que ${}^tBD$ est symétrique. On suppose qu'il existe $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$, et $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ tels que $(\underline{D} - s_1\underline{B})v_1 = 0$ et $(\underline{D} - s_2\underline{B})v_2 = 0$. Montrer que le produit scalaire $(\underline{D}v_1|\underline{D}v_2)$ est nul.

   d) On suppose que $M$ est symplectique.
   Montrer que tout $v \in \mathbb{R}^m$ tel que $\underline{D}v = 0$ et $\underline{B}v = 0$ est nul.
   On suppose que $k \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe $k$ réels non nuls distincts $s_1, ..., s_k$ tels que $D - s_iB$ soit non inversible pour tout $i \in [\![ 1, k ]\!]$.
   Pour $i \in [\![ 1, k ]\!]$, soit $v_i \in \mathbb{R}^m$ non nul tel que $v_i \in \operatorname{Ker}(\underline{D} - s_i\underline{B})$.
   Démontrer que $(\underline{D}v_1, ..., \underline{D}v_k)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^m$.
   En déduire qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $D - sB$ soit inversible.
   Soit $N = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}$. Vérifier que $N$ est symplectique. Calculer $NM$.
   *Pour les 5/2 : En déduire* $\det M$.