Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

I. Généralités

1. Déterminer les ensembles de définition de F et ζ.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. *Dérivabilité de F*
   Si a, b sont des réels tels que $1 < a < b$, démontrer que la série des dérivées $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a, b]$.
   En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
4. *Lien avec ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :
   $$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$
   Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Dans cette partie, on se propose d'établir une formule permettant de calculer la valeur des $\zeta(2k)$ avec un entier $k \geq 1$.
Pour cela, on introduit les polynômes et nombres de Bernoulli.
$\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.
On identifie un polynôme et sa fonction polynômiale associée.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n' = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

On admet qu'il existe **une et une seule** suite de polynômes de Bernoulli que l'on notera (B_n). On l'appelle **la** suite de polynômes de Bernoulli.
On pose $b_n = B_n(0)$, b_n est appelé le n-ième nombre de Bernoulli.

5. Calculer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.
6. Calculer, pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0)$.
7. *Symétrie*
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(\mathrm{X}) = (-1)^n B_n(1 - \mathrm{X})$.
8. *Développement en série de Fourier*
   Soit k un entier naturel. On définit l'application g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
   $$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ pour } x \in [0, 2\pi[\text{ et } g_k \text{ est périodique de période } 2\pi.$$
   Justifier avec soin qu'il existe une suite de réels $(a_n(k))_{n\geq 0}$ telle que, pour tout réel x, on ait :
   $$g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)\cos(nx).$$
   On admet qu'elle est unique.

9. *Expression des coefficients*
   (a) Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Exprimer $a_n(k)$ au moyen d'une intégrale et montrer que l'on a :
   $$a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}\Big(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\Big) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}a_n(k-1).$$
   (b) En déduire la valeur de $a_n(1)$ pour $n \geq 1$.
   (c) Conclure que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 2$, on a :
   $$a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.$$

   On remarquera pour la suite (sans le démontrer) que cette formule reste vraie pour $k = 1$.
10. *Conclusion*
    Déterminer, pour $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k}.
11. *Calcul effectif des b_n*
    (a) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
    $$B_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}\mathrm{X}^k.$$
    (b) En déduire une relation de récurrence permettant de calculer les nombres de Bernoulli sans avoir à déterminer les polynômes de Bernoulli associés.