Applications simples du cours.

Rappels.
Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On considère $V \ : \ (x, y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs et γ un arc orienté plan de paramétrage : $t \in I \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de classe C^1 par morceaux sur I, parcouru dans le sens des t croissants.
On rappelle que la circulation de V le long de γ, notée $\int_\gamma V$ se calcule par la formule

$$\int_\gamma V = \int_\gamma (P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy)$$

On suppose P et Q de classe C^1 sur U. L'arc γ est supposé fermé, sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique. Il délimite un domaine G d'un seul tenant, inclus dans U.
On rapelle la formule de **Green-Riemann** :

$$\int_\gamma V = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right)\ dxdy$$

1. Dans cette question seulement, on prend $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x^2 \text{ et } y^2 \leq x\}$ et pour γ l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.
   1.1. Représenter le domaine G et γ.
   1.2. Calculer directement, en paramétrant l'arc : $\int_\gamma V$ avec

$$P \ : \ (x, y) \mapsto 2xy - x^2 \ \text{ et } \ Q \ : \ (x, y) \mapsto x + y^2$$

   1.3. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. On suppose que les deux fonctions P et Q vérifient : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$.
   2.1. Que vaut $\int_\gamma V$?
   2.2. Donner un exemple de champ de vecteur V, non identiquement nul, et vérifiant la propriété :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

3.
   3.1. Démontrer que les intégrales curvilignes suivantes : $A_1 = \int_\gamma x\ dy$, $A_2 = -\int_\gamma y\ dx$ et $A_3 = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\ dy - y\ dx)$ sont égales. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   3.2. Représenter graphiquement l'arc orienté γ d'équations paramétriques

$$t \in [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{pmatrix}$$

   dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.
   On précisera les tangentes aux points singuliers.
   3.3. Déterminer l'aire délimitée par la courbe γ.

Problème.

Préliminaires.

1. Illustrer graphiquement la double inégalité : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t$.

2. On veut montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.
   On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.
   2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.
   2.2. Pour tout $x > 1$, on définit $\phi \ : \ x \mapsto \phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\, dt$.
   Montrer que l'on a : $\forall x > 1,\ \phi(x) = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$.
   2.3. Prouver que $\phi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
   2.4. Déduire de ces résultat que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

1 Une première façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.

Soient les deux fonctions :

$$P \ : \ (x, y) \mapsto P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}[x \sin(x) - y \cos(x)]$$

$$Q \ : \ (x, y) \mapsto Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}[x \cos(x) + y \sin(x)]$$

et V le champ de vecteurs : $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$.

1. Justifier le fait que P et Q sont deux fonctions de classe C^1 sur tout domaine U de $\mathbb{R}^2$ ne cotenant pas l'origine.
2. Soit γ un arc paramétré sans point double, n'entourant pas l'origine et parcouru dans le sens trigonométrique. Démontrer que $\int_\gamma V = 0$.
3. On considère Γ l'arc de cercle de rayon $\rho > 0$ paramétré par $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \begin{pmatrix} x(\theta) = \rho \cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho \sin(\theta) \end{pmatrix}$
   et on note A_ρ l'intégrale
   $$A_\rho = \int_\Gamma (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy)$$
   3.1. Montrer que $A_\rho = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))\, d\theta$.
   3.2. Calculer $\displaystyle\lim_{\rho \to 0^+} A_\rho$.
   3.3. Montrer que $\displaystyle\lim_{\rho \to +\infty} A_\rho = 0$. On pourra, par exemple, utiliser les préliminaires.
4. Soient r et R deux réels tels que $0 < r < R$. On considère l'arc γ constitué par :
   γ_1 : le segment $[A_1, A_2]$ où $A_1 = (r, 0)$et $A_2 = (R, 0)$,
   γ_2 : le quart de cercle de centre O et de rayon R reliant A_2 à $A_3 = (0, R)$,
   γ_3 : le segment $[A_3, A_4]$ où $A_4 = (0, r)$,
   γ_4 : le quart de cercle de cercle de centre O et de rayon r reliant A_4 à A_1.
   4.1. Représenter graphiquement l'arc orienté γ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.
   4.2. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1} V = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.
   4.3. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1} V\, dt = 0$.
   4.4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.