

Sujet n°1

Soit  $F$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ . On pose :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i.$$

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle  $\mathcal{E}$  :

$$xy' + \alpha y = F(x).$$

1. On désigne par  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui ne contient pas 0. Résoudre sur  $J$  l'équation homogène  $xy' + \alpha y = 0$  ; on pourra poser  $z = |x|^\alpha y$  et déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $z$ .

On désigne par  $I$  la réunion des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

2. 2a) Résoudre sur  $I$  l'équation homogène  $xy' + \alpha y = 0$

- 2b) Quelles sont les solutions sur  $I$  de l'équation homogène  $xy' + \alpha y = 0$  qui admettent une limite finie en 0 ?
3. Soient  $a, b$  deux réels. Justifier que l'équation différentielle  $\mathcal{E}$  admet une unique solution  $f$  définie sur  $I$  et telle que  $f(-1) = a$  et  $f(1) = b$ . On énoncera précisément le théorème utilisé.
4. Montrer qu'il existe au plus une solution de  $\mathcal{E}$  sur  $I$  qui admet une limite finie en 0.
5. Soit  $f$  une fonction développable en série entière ; son rayon de convergence noté  $R$  est supposé non nul. On note  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  les coefficients de  $f$  :

$$\forall x \in ]-R, R[, f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i.$$

- 5a) On suppose que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $\mathcal{E}$  sur  $] -R, R[$ . Exprimer les coefficients  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en fonction des coefficients  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $F$ . Que peut-on dire alors de  $R$  ?
- 5b) Réciproquement, démontrer que  $\mathcal{E}$  admet une unique solution développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ . On introduira la série entière :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i}{i + \alpha} x^i$$

dont on déterminera le rayon de convergence.

- 5c) Au vu des résultats précédents, quelles précisions peut-on apporter à la question 4 ?
6. Dans cette question,  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^x$ .

6a) Soit  $x \in ]0, +\infty[$  ; démontrer que l'intégrale  $\int_0^x t^{\alpha-1} e^t dt$  est convergente.

On définit  $h$  sur  $]0, +\infty[$  en posant :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, h(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^t dt.$$

- 6b) Montrer que  $h$  est solution de l'équation différentielle  $\mathcal{E}$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 6c) Montrer que  $h(x)$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives. Déterminer cette limite.
- 6d) En déduire que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i + \alpha)i!} x^i.$$

# MATHÉMATIQUES I

## Objectifs

On se propose, dans ce qui suit, de déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants lorsqu'elle est homogène, puis lorsque celle-ci admet un « second membre » d'un type particulier.

La partie I vise à établir des résultats utiles dans les suivantes.

## Notations

- Pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  :
  - si  $m \leq n$  l'ensemble  $\{k \in \mathbb{N}, m \leq k \leq n\}$  est noté  $[[m, n]]$  ;
  - $\delta_{m, n}$  vaut 1 si  $m = n$ , 0 sinon.
- Si  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , on note  $\mathbb{C}_q[X]$  l'ensemble constitué des éléments de  $\mathbb{C}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $q$  et  $\mathbb{C}_{q, p}[X]$  celui constitué des éléments de  $\mathbb{C}_q[X]$  divisibles par  $X^p$ .
- Si  $u$  est une application linéaire,  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  désignent respectivement son noyau et son image.
- Si  $u$  est un endomorphisme, par convention,  $u^0$  est l'application identité, et pour tout entier naturel  $p$ , on pose  $u^{p+1} = u \circ u^p$ .
- On considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux éléments. On dira que l'intervalle  $I$  est un voisinage de 0 s'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $[-\alpha, \alpha] \subset I$ . On note  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications de classe  $C^\infty$  de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $0_E$  son élément nul,  $\text{id}_E$  l'application identité de  $E$  et  $D$  l'endomorphisme « dérivation » de  $E$ , c'est-à-dire tel que :  $\forall f \in E, D(f) = f'$ .
- Pour tout  $y$  de  $E$ , et pour tout  $k$  entier strictement positif,  $y^{(k)}$  désigne la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $y$ . Par convention  $y^{(0)} = y$ .
- Si  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $\text{deg}(P)$  le degré de  $P$  et  $P_{(z)}$  l'application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $\forall t \in I, P_{(z)}(t) = P(t)e^{zt}$ .

# Filière PC

Sujet n°2

## Partie I -

Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \leq q$ .

**IA** - Montrer que  $\mathbb{C}_{q, p}[X]$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et citer sa dimension.

**IB** - Montrer qu'on peut définir une application  $\varphi_z$  de  $\mathbb{C}[X]$  dans  $E$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \varphi_z(P) = P_{(z)}.$$

Montrer que  $\varphi_z$  est linéaire et injective.

**IC** - Dédurre des questions précédentes que les images par  $\varphi_z$  de  $\mathbb{C}_q[X]$  et  $\mathbb{C}_{q, p}[X]$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimensions finies que l'on citera.

Dans la suite de ce problème,  $n$  est un entier naturel non nul,  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  élément de  $\mathbb{C}^{n+1}$  tel que  $\alpha_n$  n'est pas nul, et on note  $(H)$  l'équation différentielle d'inconnue  $y$  élément de  $E$  :

$$(H) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k y^{(k)} = 0_E.$$

## Partie II -

On se propose, dans cette partie, de déterminer  $S_H$ , l'ensemble des solutions de  $(H)$  définies sur  $I$ . On admettra que  $\dim(S_H) = n$ .

**IIA** - Justifier que  $S_H = \text{Ker} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k D^k \right)$ .

On note  $p$  le nombre de racines distinctes du polynôme  $A = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$  de  $\mathbb{C}[X]$  on note  $r_1, r_2, \dots, r_p$  ses racines et  $m_1, m_2, \dots, m_p$  leurs ordres de multiplicité respectifs.

**II.B** - Vérifier que  $S_H$  contient le sous-espace vectoriel  $E$  :

$$\sum_{j=1}^p \text{Ker}((D - r_j \cdot \text{id}_E)^{m_j}).$$

On admettra que cette somme est directe.

**II.C** - Dans cette question,  $r \in \mathbb{C}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ .

a) Soit  $P$  un élément non nul de  $\mathbb{C}[X]$ . Justifier l'existence d'un élément  $Q$  de  $\mathbb{C}[X]$  tel que  $d^\circ Q < d^\circ P$  et  $(D - r \cdot \text{id}_E)(P_{(r)}) = Q_{(r)}$ .

b) En déduire par récurrence la propriété suivante pour tout entier  $k$  de  $[[1, m]]$  :

$$\text{si } P \in \mathbb{C}_{k-1}[X], \text{ alors } P_{(r)} \in \text{Ker}((D - r \cdot \text{id}_E)^k).$$

c) En conclure que  $\text{Ker}((D - r \cdot \text{id}_E)^m)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension au moins  $m$ .

**II.D** - Déduire de ce qui précède que, pour tout élément  $y$  de  $E$ , on a l'équivalence suivante,  $y \in S_H$  si et seulement si il existe une famille  $(P_j)_{j \in [[1, p]]}$  d'éléments de  $\mathbb{C}[X]$  telle que :

$$\forall j \in [[1, p]], \text{ deg}(P_j) < m_j \text{ et } \forall t \in I, y(t) = \sum_{j=1}^p P_j(t) e^{r_j t}.$$

**II.E** - Dans le cas où  $I$  est un voisinage de 0, prouver que pour tout réel  $\alpha$  strictement positif tel que  $] -\alpha, \alpha[ \subset I$ , les solutions de  $(H)$  sont développables en série entière sur  $] -\alpha, \alpha[$ .

**Partie III -**

Dans cette partie, on considère un polynôme  $B$  de  $\mathbb{C}[X]$ , non nul. On note  $d$  le degré du polynôme  $B$ . On choisit un nombre complexe  $z$  et on note  $m$  l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de  $z$  en tant que racine du polynôme  $A = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$  de  $\mathbb{C}[X]$ .

On se propose de résoudre l'équation différentielle, d'inconnue  $y$  élément de  $E$ , notée  $(L)$  :

$$(L) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k y^{(k)} = B_{(z)}.$$

**III.A** - Vérifier qu'on peut définir une application  $\psi$ , de  $\mathbb{C}_{m+d,m}[X]$  dans  $\mathbb{C}_d[X]$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{C}_{m+d,m}[X], \psi(P) = \left[ \sum_{k=0}^n \alpha_k D^k \right] (P_{(z)})$$

puis montrer que celle-ci est linéaire.

**III.B** - Prouver que  $\psi$  est injective et que  $\text{Im}(\psi) \subset \mathbb{C}_d[X]$ .

**III.C** - Démontrer qu'il existe un unique élément  $\Pi$  de  $\mathbb{C}_{m+d,m}[X]$  tel que  $\Pi$  soit solution de  $(L)$ , définie sur  $I$ , puis préciser, en fonction de  $\Pi$ , l'ensemble des solutions de  $(L)$  sur  $I$ .

**III.D** - Dans le cas où l'intervalle  $I$  est un voisinage de 0, les solutions de  $(L)$  sont-elles développables en série entière sur tout intervalle  $] -\alpha, \alpha[$  ( $\alpha > 0$ ) que  $] -\alpha, \alpha[ \subset I$  ?

**Partie IV -**

On suppose, dans cette dernière partie, que  $\alpha_0$  vaut 1 et que :

$$M = \max_{k \in [[0, n]]} |\alpha_k|$$

On considère également un élément  $b$  de  $E$  et on note  $(L_b)$  l'équation différentielle, d'inconnue  $y$  élément de  $E$  :

$$(L_b) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k y^{(k)} = b.$$

**IV.A** - Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tel que  $] -\alpha, \alpha[ \subset I$  et que  $(L_b)$  admette une solution développable en série entière sur l'intervalle  $] -\alpha, \alpha[$ .

Montrer que  $b$  est également développable en série entière sur l'intervalle  $] -\alpha, \alpha[$ . Qu'en est-il alors des autres solutions de  $(L_b)$  ?

**IV.B** - Montrer que, si  $p \in \mathbb{N}$ , alors il existe un unique élément  $\Pi_p$  de  $\mathbb{C}_p[X]$  que :

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \Pi_p^{(k)} = \frac{X^p}{p!}.$$

Prouver qu'il existe un unique élément  $(\pi_{p,j})_{j \in [[0, p]]}$  de  $\mathbb{C}^{p+1}$  tel que :

$$\Pi_p = \sum_{j=0}^p \left( \pi_{p,j} \cdot \frac{X^j}{j!} \right).$$

IV.C - Prouver que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad q \leq p \Rightarrow \sum_{k=0}^{\min\{n, p-q\}} (\alpha_k \cdot \pi_{p, q+k}) = \delta_{p, q}$$

IV.D - Lorsque  $p$  est un entier strictement positif, traduire sous forme matricielle le système linéaire précédent d'inconnue  $(\pi_{p, j})_{j \in \llbracket 0, p \rrbracket}$ , élément de  $\mathbb{C}^{p+1}$ , puis écrire une procédure qui, en fonction de  $n$  et du système  $\alpha$ , détermine l'unique solution de celui-ci.

IV.E -

a) Vérifier que :  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket, |\pi_{p, p-j}| \leq (2M)^j$ .

b) En déduire que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout entier  $q$ , alors :

$$|\Pi_q(t)| \leq (2M + |t|)^q.$$

On suppose dorénavant que  $b$  est une application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  développable en série entière sur un intervalle  $]-\alpha, \alpha[$  ( $\alpha > 0$ ) inclus dans  $I$ . On note  $r$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum b^{(n)}(0) z^n$  et on suppose que  $r > 2M$ .

IV.F -

a) Montrer qu'il existe  $\beta$  élément de  $]0, \alpha[$  tel que la suite de fonctions  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I, f_p(t) = \sum_{q=0}^p b^{(q)}(0) \Pi_q(t)$$

converge sur  $]-\beta, \beta[$ .

On note  $f$  la limite de cette suite de fonctions, définie sur  $]-\beta, \beta[$ .

b) Prouver que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-\beta, \beta[$ .

IV.G - Justifier que  $f$  est une solution de  $(L_b)$  définie sur l'intervalle sur  $]-\beta, \beta[$ .

IV.H - Prouver que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-\beta, \beta[$  et que pour tout entier  $k > 0$ , on a :

$$\forall t \in ]-\beta, \beta[, f^{(k)}(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p^{(k)}(t).$$

IV.I - Si  $t \in \mathbb{R}^+$ , on note  $E(t)$  sa partie entière.

On se propose, dans cette question, de démontrer que  $f$  est développable en série entière sur  $]-\beta, \beta[$ . À cet effet, on introduit un élément  $x$  de  $]-\beta, \beta[$  puis,  $\forall$  tout entier  $p$  de  $\mathbb{N}$ , l'application  $e_p$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, e_p(t) = \frac{f_p^{(E(t))}(0) \cdot x^{E(t)}}{[E(t)]!}.$$

a) Montrer que, si  $p \in \mathbb{N}$ ,  $e_p$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et préciser la valeur de l'intégrale sur  $\mathbb{R}^+$ .

b) Exhiber une application  $\varepsilon$  en escalier de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  intégrable telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, |e_p(t)| \leq \varepsilon(t).$$

c) Conclure.

IV.J -

a) Qu'en déduit-on pour les solutions de  $(L_b)$  sur l'intervalle  $]-\beta, \beta[$  ?

b) Les résultats précédents sont-ils encore valables si  $\alpha_0$  n'est pas égal à 1

---

••• FIN •••

---