Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PSI

Les parties I, II et IV sont consacrées à l'étude de trois relations de récurrence différentes. L'attention des candidats est attirée sur le fait que les hypothèses faites sur les constantes a, b, c, d intervenant dans ces récurrences changent d'une partie à l'autre. La partie III est consacrée à l'étude d'un outil de calcul intégral permettant de comparer les résultats obtenus dans les autres parties.

Note :

> Dans plusieurs questions du problème, il est demandé d'écrire une séquence d'instructions réalisant un calcul. Dans ces questions le candidat est invité à définir une fonction en utilisant la syntaxe de Maple ou Mathematica. Il est invité à signaler au début de sa copie le langage utilisé.

Question préliminaire

On donne la séquence d'instructions définissant ci-dessous la fonction $f : \mathbb{C}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ dans chacune des deux syntaxes (Maple et Mathematica).

Version Maple	Version Mathematica

$f :=$ **proc**(a,b)
local i,j,k :
$i := 1 :\ j := a :\ k := b :$
while $k > 0$ **do**
  if *type*(k, odd)
    then $i := i * j\ :\ k := k - 1$
    else $j := j\hat{}2\ :\ k := k/2$:
  fi : **od** :
i :
end :
	`f[a_, b_] := Block[{i, j, k},`
	`i = 1; j = a; k = b;`
	  `While[k > 0,`
	    `{i, j, k} = If[OddQ[k], {i * j, j, k - 1},`
	    `{i, j^2, k/2}]`
	  `];`
	  `i]`

Exprimer simplement la valeur de $f(a,b)$ où $(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{N}$.

Note : pour Maple « *type*(k, odd) » (resp. pour Mathematica « `OddQ[k]` ») est un booléen qui est vrai lorsque k est un entier impair (en anglais, *odd*) et faux dans le cas contraire.

Partie I - Récurrence en dimension 1

Dans cette partie, a, b sont deux réels fixés avec $a \neq 1$. On considère une suite u définie par un terme initial u_0 et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = a\,u_n + b \tag{1}$$

I.A - Écrire une séquence d'instructions permettant le calcul de u_n pour n donné (on ne cherchera pas à optimiser les calculs).

I.B - Déterminer la constante k telle que la suite v définie par

$$\forall n :\ v_n = u_n + k$$

vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = a\,v_n$.

I.C - En déduire la valeur de u_n en fonction de u_0 et de n.

I.D - On appelle série ordinaire associée à la suite u la fonction S de la variable complexe z qui est somme de la série entière de terme général $u_n\,z^n$. Autrement dit :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,z^n \tag{2}$$

Déterminer la valeur ρ du rayon de convergence de cette série (une discussion précise des cas particuliers est demandée). Quelle est la valeur minimale ρ_S de ce rayon pour a fixé ?

I.E - On suppose $|z| < \rho_S$. Partir de la relation évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\,u_n - b)\,z^n = 0$$

et obtenir une équation ordinaire (non différentielle) vérifiée par $S(z)$. Résoudre cette équation et exprimer S sous la forme :

$$S(z) = u_0\,A + b\,B \tag{3}$$

où A et B sont deux fractions rationnelles dépendant de z et a.

- version du 27 février 2008 16h9

I.F - On appelle série exponentielle associée à la suite u la série entière de la variable $z \in \mathbb{C}$ définie par :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n \tag{4}$$

Déterminer le rayon de convergence ρ_G de cette série G. On pose :

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} z^n \tag{5}$$

Montrer que $G'(z)$ a même rayon de convergence ρ_G que $G(z)$ et que si x est un réel avec $|x| < \rho_G$, $G'(x)$ est effectivement la dérivée de la fonction réelle $x \mapsto G(x)$.

I.G - Partir de la relation évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\,u_n - b)\ \frac{x^n}{n!} = 0$$

et obtenir (par des transformations justifiées) une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction G. Résoudre cette équation en remarquant que (4) fournit aussi une condition initiale pour $G(x)$. Obtenir G sous la forme

$$G(x) = u_0\, C + b\, D \tag{6}$$

où C et D dépendent de x et a.

I.H - En utilisant (6), retrouver l'expression de u_n en fonction de n.

Écrire une séquence d'instructions utilisant cette expression pour calculer u_n pour chaque valeur donnée de n. Ce programme est-il plus rapide que celui du **I.A** ? Que peut-on faire pour obtenir un programme réellement plus rapide ?

Partie II - Récurrence en dimension 2

Dans cette partie, a, b, c, d sont quatre réels tous différents de 0. On considère deux suites u et v définies par leurs termes initiaux u_0, v_0 et la relation de récurrence matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7}$$

On suppose en outre que les valeurs propres λ, μ de la matrice M sont distinctes et que u_0, v_0 ne sont pas simultanément nuls.

II.A - Réécrire (pour cette seule question) le système (7) en fonction de a, b, λ, μ. Diagonaliser la matrice M et exprimer (u_n, v_n) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \Big(\text{expression matricielle simple en } a,\ b,\ \lambda,\ \mu \text{ et } n\Big) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

II.B - On revient à la notation en a, b, c, d et, comme à la section **I-D**, on appelle séries ordinaires associées aux suites u et v les fonctions S et T de la variable complexe z qui sont les sommes des séries entières de termes généraux $u_n z^n$ et $v_n z^n$. Autrement dit :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n,\ T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \tag{8}$$

On admet, dans la suite de cette partie, qu'il existe un réel $\rho > 0$ tel que les deux séries $S(z)$ et $T(z)$ sont convergentes pour $|z| < \rho$. Pour un tel z, partir des relations évidentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\,u_n - b\,v_n)\ z^n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (v_{n+1} - c\,u_n - d\,v_n)\ z^n = 0$$

et obtenir un système de deux équations ordinaires (non différentielles) vérifiées par $S(z)$ et $T(z)$. Résoudre ce système et exprimer $S(z)$ et $T(z)$ sous la forme :

$$A\,u_0 + B\,v_0$$

où A et B sont deux fractions rationnelles en z (chacune dépendant des coefficients a, b, c, d).

Que peut-on dire des rayons de convergence de S et T ?

II.C - On appelle séries exponentielles G, H associées aux suites u et v les fonctions de la variable $x \in \mathbb{R}$ qui sont les sommes des séries entières ayant respectivement pour termes généraux $\dfrac{u_n x^n}{n!}$ et $\dfrac{v_n x^n}{n!}\cdot$ Autrement dit :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n!} x^n \tag{9}$$

Déterminer les rayons de convergence de ces deux séries.

II.D - Procéder comme précédemment et obtenir (par des transformations justifiées) un système de deux équations différentielles permettant d'exprimer G' et H' en fonction de G et H.

II.E - En déduire que G et H sont solutions de la même équation différentielle linéaire du second ordre (E) dont on exprimera les coefficients en fonction de λ et μ. À quelle condition les fonctions G et H forment-elles une base de l'espace des solutions de (E) ?

II.F - Résoudre les équations différentielles précédentes et obtenir $G(x)$ et $H(x)$ sous une forme simple mettant en évidence la dépendance par rapport aux conditions initiales.

Partie III - Transformation de Laplace

On rappelle que la transformée de Laplace $\mathrm{Lap}(f)$ d'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs complexes est définie par :

$$\mathrm{Lap}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \exp(-t\,p)\, \mathrm{d}t$$

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, en Sciences de l'Ingénieur, la convergence de ces intégrales est, en dernière analyse, assurée par l'existence du système matériel étudié. Dans le présent problème, la convergence de ces mêmes intégrales n'est pas assurée et doit être examinée avec attention.

Dans ce qui suit, on supposera toujours $\alpha \in \mathbb{R}$. On dira qu'une fonction f est $CDI(\alpha)$, i.e. « continue et dominée à l'infini par $\exp(\alpha t)$ » lorsque :

1. f est une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{C}$.
2. l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t} f(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

III.A - On suppose que f est $CDI(\alpha)$. Démontrer que pour tout nombre complexe p dont la partie réelle est strictement supérieure à α, $\mathrm{Lap}(f)(p)$ est une intégrale convergente.

III.B - On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que f est $CDI(\alpha)$.

Démontrer que pour tout nombre complexe p dont la partie réelle est strictement supérieure à α, $\mathrm{Lap}(f')(p)$ est une intégrale convergente et calculer $\mathrm{Lap}(f')(p)$ en fonction de $\mathrm{Lap}(f)(p)$, de p et de $f(0)$.

III.C - Pour une suite (u_n) quelconque de nombres réels, on rappelle que les séries S et G ont été définies respectivement dans les sections **I.D** et **I.F** par les formules :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, z^n \quad \text{et} \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}\, z^n$$

En admettant (pour cette seule question) que l'on puisse permuter série et intégrale et en admettant l'existence des intégrales rencontrées, effectuer les calculs reliant la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto G(t)$, $t \geqslant 0$ avec la série S. On obtiendra un résultat sous la forme :

$$\mathrm{Lap}(G)(p) = \text{expression simple en } S \text{ et } p \tag{10}$$

lorsque p est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positive.

III.D - On souhaite appliquer la formule précédente aux séries S et G associées à la suite récurrente u étudiée dans la Partie **I.** (par les fomules (2) et (4)). Utiliser la linéarité de Lap et les résultats précédents pour transformer l'équation différentielle concernant $t \mapsto G(t)$ en une équation ordinaire concernant S. Vérifier que l'on retrouve l'expression déjà obtenue en **I.E**.

Partie IV - Une récurrence explosive

Dans cette partie, a, b, c, d sont quatre réels tous différents de 0, tels que $|a| \neq |d|$ et que $\dfrac{bc}{ad}$ ne soit pas le carré d'un nombre entier. On considère deux termes initiaux u_0, v_0 **réels** et non simultanément nuls et les deux suites réelles u et v définies par la nouvelle relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = a\,n\,u_n + b\,v_n \\ v_{n+1} = c\,u_n + d\,n\,v_n \end{cases} \tag{11}$$

IV.A - On pose $\omega(n) = u_n^2 + v_n^2$.

IV.A.1) Établir l'encadrement : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ -u^2 - v^2 \leqslant 2uv \leqslant u^2 + v^2$.

IV.A.2) Démontrer que, pour tout n, $\omega(n)$ n'est jamais nul. Obtenir, pour $n \geqslant 1$, un encadrement de la forme :

$$\alpha(n) \leqslant \frac{\omega(n+1)}{n^2\,\omega(n)} \leqslant \beta(n)$$

où les quantités $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ont des limites finies quand $n \to \infty$.

IV.B - On considère les séries S, T, G, H associées par les formules respectives (8) et (9) aux suites u et v définies par la formule (11).

IV.B.1) En utilisant la formule (11), démontrer que $S(z)$ et $T(z)$ ont le même rayon de convergence. Quel est ce rayon de convergence commun (on pourra utiliser la section **A.**) ?

IV.B.2) Démontrer que $G(z)$ et $H(z)$ ont le même rayon de convergence et qu'il est supérieur à $\dfrac{1}{\max\big(|a|,\,|d|\big)}\cdot$

IV.C - Soit q la suite de terme général $q_n = \dfrac{u_n}{n\,v_n}\cdot$ Écrire la relation de récurrence existant entre q_n et q_{n+1}. On obtiendra une fonction $z \mapsto \phi_n\,(z)$ (dépendant du paramètre n) telle que :

$$q_{n+1} = \phi_n\,(q_n) \quad \text{avec} \quad q_n = \frac{u_n}{n\,v_n} \tag{12}$$

IV.D - Écrire une séquence d'instructions permettant le calcul des valeurs successives de q_n en fonction de la valeur initiale $q1 = q_1$ entrée en paramètre et s'arrêtant lorsque la variation entre q_{n+1} et q_n devient inférieure à une précision donnée, ε.

IV.E - Partir des relations évidentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(u_{n+1} - a\,n\,u_n - b\,v_n\right)\frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(v_{n+1} - c\,u_n - d\,n\,v_n\right)\frac{x^n}{n!} = 0$$

et obtenir, dans un domaine que l'on précisera, un système différentiel du premier ordre vérifié par les fonctions $x \mapsto G\,(x)\,,\ x \mapsto H\,(x)$.

IV.F - En déduire une équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par la fonction G. Faire de même pour H.

IV.G - Démontrer que l'équation du deuxième ordre en G possède une solution polynomiale non nulle si et seulement si $\dfrac{bc}{ad}$ est le carré d'un nombre entier.

• • • FIN • • •
