*Le problème étudie la minimisation d'une fonctionnelle sur un espace de fonctions vérifiant $y(0) = 0$ et $y(1) = c$. La première partie consiste à démontrer un lemme qui sera utilisé dans la deuxième partie. Les troisième et quatrième parties traitent de cas particuliers.*

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $Ox, Oy$, le déplacement d'un point mobile $M$ est soumis à la contrainte suivante : lorsque le point occupe la position $(x, y)$, sa vitesse algébrique a pour valeur imposée $v(x, y)$ où $v$ est une fonction donnée des deux variables réelles $x$ et $y$. Le temps mis par $M$ pour parcourir un arc $\Gamma$ de classe $C^1$ d'origine $O$, d'extrémité $A$ de coordonnées $(1, c)$ et d'équation $y = \varphi(x)$ où $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = c$, a donc pour valeur :

$$T = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}s}{v(x,y)} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\varphi'^2(x)}}{v(x,\varphi(x))}\mathrm{d}x.$$

## PARTIE I

$I$ désigne l'intervalle $[0, 1]$ et $C^1(I)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $I$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $I$, muni de la norme $\|\ ,\ \|$ définie par $\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|$.

**1.** Montrer que l'ensemble $\Gamma^1(I)$ des fonctions $u \in C^1(I)$ telles que $u(0) = u(1) = 0$ est un sous espace vectoriel fermé de $C^1(I)$. (On pourra prouver que la limite $f$ d'une suite $(f_n)$ d'éléments de $\Gamma^1(I)$ convergente dans $C^1(I)$, appartient à $\Gamma^1(I)$).

**2.** Soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $0 \le a \le b \le 1$ et $h$ la fonction définie sur $I$ par :
$\forall x \in [0, a[\quad h(x) = 0$
$\forall x \in [a, b]\quad h(x) = (x-a)^2(b-x)^2$
$\forall x \in ]b, 1]\quad h(x) = 0$
Vérifier que $h \in \Gamma^1(I)$ et calculer $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$.

**3.** Dans ce qui suit, $g$ désigne une fonction réelle définie et continue sur $I$. Montrer que l'application $G$ de $\Gamma^1(I)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G : u \mapsto G(u) = \int_0^1 g(x)u(x)\mathrm{d}x$$

est linéaire sur $\Gamma^1(I)$.

**4.** Montrer que, s'il existe $x_0 \in I$ tel que la fonction $g$ vérifie l'inégalité $g(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ inclus dans $I$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que l'on ait :

$$\forall x \in [a, b]\quad g(x) \ge \alpha.$$

En déduire alors que, pour que l'on ait ($\forall u \in \Gamma^1(I)\quad G(u) = 0$), il faut et il suffit que $g$ soit la fonction nulle. ( utiliser la fonction h du 2) en raisonnant par l'absurde )

**5.** $G_1$ est la forme linéaire sur $\Gamma^1(I)$ définie par :

$$\forall u \in \Gamma^1(I)\quad G_1(u) = \int_0^1 g(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

On suppose que $g \in C^1(I)$ ; montrer que ($\forall u \in \Gamma^1(I)\quad G_1(u) = 0$) si et seulement si $g$ est constante sur $I$.

**6.** On suppose dans cette question que $g$ est uniquement continue sur $I$.
Quelle valeur faut-il donner à la constante réelle $\mu$ pour qu'il existe une fonction $u_\mu \in \Gamma^1(I)$, dont la dérivée est la fonction $x \mapsto g(x) - \mu$ ?
Vérifier que, pour cette valeur de $\mu$, on a :

$$G_1(u_\mu) = \int_0^1 \left(u'_\mu(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

En déduire que ($\forall u \in \Gamma^1(I)\quad G_1(u) = 0$) si et seulement si $g$ est constante sur $I$.

## PARTIE II

**1.** $c$ étant un réel positif ou nul donné, $\Gamma^1_c(I)$ désigne le sous-ensemble de $C^1(I)$ dont les éléments sont les fonctions $y$ telles que $y(0) = 0$ et $y(1) = c$. Que peut-on dire de la différence $y_2 - y_1$ de deux éléments de $\Gamma^1_c(I)$ ?

2. $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ désignant une fonction réelle donnée, définie sur $\Delta = I \times \mathbb{R}$, continue, ayant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ continue sur $\Delta$, on considère l'application de $\Gamma_c^1(I)$ dans $\mathbb{R}$ :

$$F : Y \mapsto F(Y) = \int_0^1 f(x, Y'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Prouver que si $y$ correspond à un minimum local de F, alors, pour toute fonction $u \in \Gamma^1(I)$ non nulle, l'application :

$$G_u : \theta \mapsto G_u(\theta) = \int_0^1 f(x, y'(x) + \theta u'(x))\,\mathrm{d}x$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ présente un minimum local pour $\theta = 0$.

3. Soit $u$ et $y$ deux éléments respectivement de $\Gamma^1(I)$ et $\Gamma_c^1(I)$ ; vérifier que $G_u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donner l'expression de $G_u'(\theta)$ sous forme d'intégrale et déterminer $G_u'(0)$. Intégrale à paramètre

4. Déduire alors de ce qui précède qu'une condition nécessaire pour que la fonction $y \in \Gamma_c^1(I)$ corresponde à un minimum local de $F$ est l'existence d'un réel $\lambda$ tel que $y$ soit solution sur $I$ de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y') = \lambda$$

c'est à dire

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, y'(x)) = \lambda.$$

## PARTIE III

On étudie le cas particulier $v(x,y) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$, pour un certain type de fonctions $\alpha$.

1. $\alpha : x \mapsto \alpha(x)$ étant une fonction définie sur $I$, continue et croissante, telle que $\alpha(0) > 0$, déterminer l'ensemble $L$ des réels $\lambda \geq 0$ pour lesquels l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \qquad \alpha(x)\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \lambda$$

admet des solutions appartenant à $\mathcal{C}^1(I)$. Pour tout $\lambda \in L$, exprimer sous forme d'intégrale la solution particulière $y_\lambda \in \mathcal{C}^1(I)$ de $(E_\lambda)$ telle que $y_\lambda(0) = 0$.

2. Soit $k$ définie sur $L$ par :

$$k(\lambda) = \int_0^1 \frac{\lambda}{\sqrt{(\alpha(x))^2 - \lambda^2}}\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $k$ est continue, dérivable et injective sur $L$.

b) On suppose désormais qu'il existe un réel strictement positif $\beta$ tel que $\alpha(x) - \alpha(0) \geq \beta x$ pour tout $x$ de $I$. Montrer que $k$ est bornée et en déduire que $k$ possède une limite finie $K$ lorsque $\lambda$ tend vers $\alpha(0)$.

3. A quelle condition doit satisfaire le nombre $c \geq 0$ pour qu'il existe une valeur de $\lambda$ pour laquelle $(E_\lambda)$ admette une solution $y$ appartenant à $\Gamma_c^1(I)$ ?
Cette condition étant supposée remplie, montrer que la valeur de $\lambda$ est unique.

## PARTIE IV

(supprimée)