Épreuve : MATHÉMATIQUES I

Calculatrices autorisées

Le problème porte sur des déclinaisons de la lettre « C » dans différents domaines des mathématiques. Les trois parties du problème sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un « C » matriciel

On considère la matrice à coefficients réels $C \in \mathscr{M}_7(\mathbb{R})$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de $\mathbb{R}^7$, et c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ dont la matrice dans la base canonique est C. Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes à 7 lignes à coefficients réels et les vecteurs de $\mathbb{R}^7$.

On note $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6,\ f_7$ les vecteurs colonnes de la matrice C.

I.A - Image et noyau de *c*

Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c, ainsi que le rang de c.

I.B - Restriction de *c*

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^7$ engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2 et f_3 de C.

I.B.1) Montrer que F est stable par c.

I.B.2) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F, et calculer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c.

I.C - Détermination sans calcul du spectre de Φ

Dans cette question, on se propose de calculer le spectre de Φ sans calculer son polynôme caractéristique.

I.C.1) Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?

- version du 18 février 2010 10h20

I.C.2) Peut-on déduire du seul calcul de la trace de Φ que Φ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

I.C.3) Calculer Φ^2. À partir des informations complémentaires obtenues par le calcul de la trace de Φ^2, déterminer le spectre de Φ.

La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

I.D - Étude du caractère diagonalisable de C

I.D.1) Déduire des questions précédentes le spectre de C. On précisera l'ordre de multiplicité des valeurs propres.

I.D.2) La matrice C est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$? Si oui, indiquer une matrice diagonale semblable à C.

I.E - Étude d'une équation fonctionnelle

Notation : si f est une fonction de classe C^1 d'un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) vers $\mathbb{R}$, on note, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant d$, $\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à sa i-ème variable. Ainsi, la notation $\partial_i f(x_1, \ldots, x_d)$ désigne la valeur de la dérivée partielle de f par rapport à sa i-ème variable évaluée au point $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathscr{U}$.

Dans cette section, on se propose d'étudier les fonctions f de classe C^1

Partie III - Des courbes pour la lettre « C »

III.A - Topologie de $\mathscr{C}$

III.A.1) Représenter $\mathscr{C}$.

III.A.2) Préciser les propriétés topologiques suivantes de $\mathscr{C}$.

a) Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

b) Un fermé ?

c) Une partie bornée ?

d) Un compact ?

e) Une partie convexe ?

III.B - Paramétrisation complexe de $\mathscr{C}$

On rappelle que $\mathscr{C}$ a été définie dans la partie II comme l'image de l'application

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, 2\sin t).$$

Dans cette question, on va chercher une paramétrisation complexe de $\mathscr{C}$, de la forme

$$z : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)},$$

où ρ et θ sont deux fonctions continues de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ vers $\mathbb{R}$, la fonction ρ étant à valeurs strictement positives.

III.B.1) Calculer $\rho(t)$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

III.B.2) Représenter sur la calculatrice l'arc paramétré

$$\mathscr{G} : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

et reproduire sommairement la courbe sur la copie. Quelle lettre cette courbe évoque-t-elle ?

III.B.3) À partir de l'expression de $\gamma(t)$, calculer $\tan\theta(t)$.

III.B.4)

a) Représenter la fonction $t \mapsto \arctan(2\tan t)$ sur la partie de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ sur laquelle cette fonction est définie.

b) Modifier cette fonction pour déterminer la fonction continue θ cherchée.

On vérifiera le résultat en représentant à l'aide de la calculatrice la courbe paramétrée z.

III.B.5) Indiquer une suite d'instructions *Maple* ou *Mathematica* permettant d'obtenir ce tracé.

III.C - Une famille de courbes paramétrées pour la lettre « C »

Dans cette question, on va construire une famille de courbes déduites de celle de la question V.A, mais donnant un aspect visuel différent de la lettre « C ».

Dans ce qui suit, la notation $\mathrm{E}(x)$ désignera la partie entière du réel x.

On définit les applications :

- $\alpha : \mathbb{N}^* \times \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, (n,t) \mapsto \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{2n}\mathrm{E}\left(\dfrac{2n}{3\pi}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
- $\omega : \mathbb{N}^* \times \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, (n,t) \mapsto \cos^2\left(\dfrac{2n}{3}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

III.C.1) Étudier rapidement α et ω, puis représenter sur un même graphique les deux fonctions $t \mapsto \alpha(10,t)$ et $t \mapsto \omega(10,t)$.

III.C.2) Représenter la fonction $\psi : \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{2}{3}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

III.C.3) On définit la fonction :

$$w : \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{C}, (n,t) \mapsto \rho(t)\left(1 + \psi(t)\omega(n,t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\alpha(n,t))}.$$

On a représenté ci-contre cette courbe, lorsque $n = 40$. Mais la courbe a été mélangée avec d'autres courbes représentant la lettre « C ». Identifier lequel des quatre graphiques représente la fonction $t \mapsto w(40,t)$, et expliquer pourquoi.

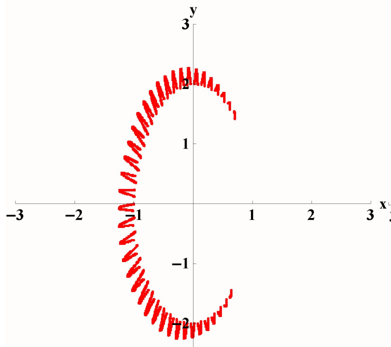

Figure A

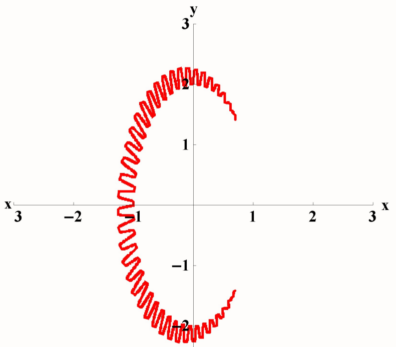

Figure B

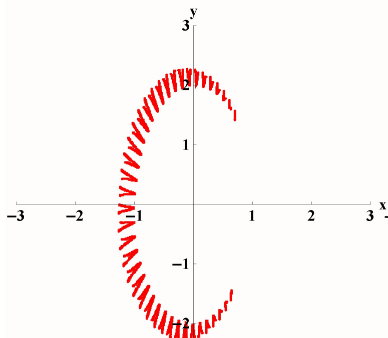

Figure C

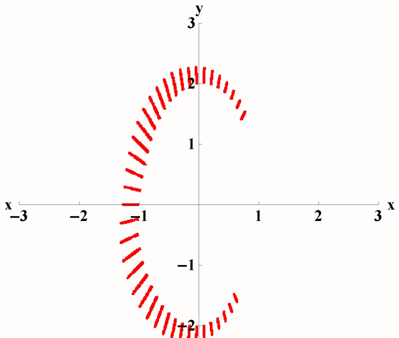

Figure D

III.C.4) Écrire une séquence d'instructions *Maple* ou *Mathematica* permettant de créer la séquence des 100 premières courbes (on pourra créer une animation).

III.D - Calcul d'aire

Dans cette question, on se propose de calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{H}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant tous les points $w(n,t)$ lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ et t décrit $I = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$. Ce domaine