Dans tout ce problème, E désigne l'espace vectoriel (réel) des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme: $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$

1- Soit $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls). Pour tout x de $[0,1]$ on pose :

$$g_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$$

a- Démontrer que chaque application : $h_i : x \mapsto x^i \int_0^x (-t)^{n-i} f(t)\, dt$ est de classe C^1 sur $[0,1]$

b- En déduire que la fonction g_n est n+1 fois continûment dérivable sur $[0,1]$,que :

$$\forall p \in \{0..n\} \qquad g_n^{(p)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-p}}{(n-p)!} f(t)\, dt \qquad \text{et calculer } g_n^{(n+1)}.$$

2- Soit φ_n l'application de E dans E définie par : $\varphi_n(f) = g_n$

a- Démontrer que φ_n est linéaire de E dans E et que : $\forall f \in E \quad \|\varphi_n(f)\|_\infty \le \frac{1}{(n+1)!}\|f\|_\infty$

b- Démontrer que φ_n est injective. Est-elle surjective ?

3- On considère l'application k_1 définie sur $[0,1]^2$ par : $\begin{cases} k_1(x,t) = 1 & \text{si } 0 \le t \le x \le 1 \\ k_1(x,t) = 0 & \text{si } t > x \end{cases}$

et l'application K définie sur E par : $f \mapsto K(f)$ où $K(f)(x) = \int_0^1 k_1(x,t) f(t)\, dt$

a- Démontrer que K est un endomorphisme injectif de E.

b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi_n = K^{n+1} = K \circ K \circ \ldots \circ K$ (fonction composée n+1 fois)

c- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de K. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\lambda|^n \le \frac{1}{n!}$

d- Déduire de ce qui précède l'ensemble des valeurs propres de K.

e- Soit $f \in E$; démontrer que l'équation $(Id - K)(g) = f$ admet pour unique solution dans E l'application g définie sur $[0,1]$ par : $g(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt$