PB n°1

Dans tout le texte E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note id l'endomorphisme identité de E, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1.

. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace E est muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$, est définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F le projecteur sur F, parallèlement à $F^\perp$.

Enfin, si x est un vecteur de E, la distance euclidienne de x à F, notée $\mathrm{d}(x, F)$ est le réel :

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\|x - y\| \quad | \quad y \in F\}.$$

1. *Théorème de la projection orthogonale* : soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E. Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $\mathrm{d}(x, F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.
2. *Cas des hyperplans* : soit n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à n, c'est à dire $H = (\mathrm{Vect}\,\{n\})^\perp$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x, H)$ en fonction de $< x, n >$ et de $\|n\|$.
3. *Une application* : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace,

$$< A, B > = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

(a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^\perp$.

(b) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\mathrm{d}(M, H)$.

4. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie notée N_∞ : si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\quad N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,\{(1,0)\}$ et $x = (1,1)$. Déterminer la distance «infinie» du vecteur x à F, c'est-à-dire le réel :

$$\mathrm{d}_\infty(x, F) = \inf\{N_\infty(x - y) \quad | \quad y \in F\},$$

et préciser l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $\mathrm{d}_\infty(x, F) = N_\infty(x - m)$. Commenter.

PB n°2

E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0) = 0$.

E_1 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

E_2 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note

$$N_1(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_1 \,;\; N_2(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} (f'(t))^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_2.$$

Le but du problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$). On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t > 0$. On pose $\alpha = f'(0)$.
   - 1.1. Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t \to 0^+$?
   - 1.2. Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   - 1.3. Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t) \times g'(t)$) lorsque $t \to 0^+$? (on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$).
   - 1.4. Établir, pour $x > 0$, la relation :
   $$(R) \;:\; \int_{]0,x]} (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_{]0,x]} \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_{]0,x]} (h(t))^2 \,\mathrm{d}t$$
   (après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0, x]$ de chacune des fonctions qui interviennent).
2. **Comparaison de E_1 et E_2.**
   - 2.1. Déduire de la relation (R) l'inclusion $E_2 \subset E_1$.
   - 2.2. Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$)
3. **Comparaison de N_1 et N_2.**
   - 3.1. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_0. On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.
   - 3.2. Justifier l'inégalité $N_1(f) \leqslant 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.
   - 3.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(nt)$. Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.
   - 3.4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes sur E_2 ?
4. Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$; quelle est cette limite ?