On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N}$ privé de 0 et par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Etant donné un entier naturel $n$, on note $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels $k$ tels que $0 \leq k \leq n$.

On note $\mathbf{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et, pour $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_k[x]$ le sous espace de $\mathbf{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $k$. On identifiera le polynôme $P \in \mathbf{R}[x]$ avec la fonction polynôme associée.

On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[-1,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on note $\mathcal{R}$ l'espace des restrictions à $[-1,1]$ des polynômes de $\mathbf{R}[x]$ et on note $\mathcal{R}_k$ l'espace des restrictions à $[-1,1]$ des polynômes de $\mathbf{R}_k[x]$. Par abus, on appellera polynôme une fonction de $\mathcal{R}$.

Le but du problème est de définir une méthode de calcul approché d'une famille d'intégrales.

Dans la partie I, on étudie une famille de polynômes. La partie II utilise une structure d'espace préhilbertien réel de l'espace $\mathcal{C}$, pour obtenir une formule de calcul exacte de certaines intégrales.
La partie III conduit à la méthode de calcul approché annoncée.

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $t_n \in \mathcal{C}$ par : pour tout $x \in [-1,1]$, $t_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$.

# PARTIE I

**1.** Simplifier les expressions de $t_0, t_1, t_2, t_3$ et constater que ces fonctions ont des expressions polynomiales, que l'on explicitera.

**2.** Tracer, sur un même dessin, les graphes de $t_0$, $t_1$, $t_2$ et $t_3$. Préciser les racines et les extremums de chaque fonction.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\theta_k = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

**3.** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer les racines de la fonction $t_n$. Montrer que les racines de $t_n$ sont deux à deux opposées.

**4.** On suppose l'entier $n \geq 2$. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.

4.1 Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k}$.

4.2 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0$.

Pour $x \in [-1,1]$, le changement de variable bijectif $\theta = \operatorname{Arc} \cos x$, permet d'écrire $t_n(x) = \cos(n\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

**5.** Pour $n \geq 1$, exprimer $t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x)$ en fonction de $x$ et de $t_n(x)$.

**6.** En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $t_n$ est la restriction à l'intervalle $[-1,1]$ d'un polynôme $T_n$ de $\mathbf{R}[x]$. Préciser le degré de $T_n$ et le coefficient de son terme de plus haut degré.

**7.** Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme $T_n$ n'a pas de racine complexe non réelle.

## PARTIE II

**1.** Soit $f$ une fonction de $\mathcal{C}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

**2.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

2.1 Calculer $I_0$ et $I_1$.

2.2 Pour $n \geq 2$, donner une relation entre $I_n$ et $I_{n-2}$ (on pourra, entre autre méthode, utiliser le changement de variable $\theta = Arc \cos x$).

2.3 En déduire les valeurs de $I_2$ et $I_4$. Quelle est la valeur de $I_{2p+1}$ pour $p \in \mathbb{N}$ ?

**3.** Définition d'une structure préhilbertienne réelle sur $\mathcal{C}$.

3.1 Montrer que l'application de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $R$ définie par $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x) g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

3.2 Montrer que la famille de fonction $t_p$, pour $p \in [\![0, n]\!]$, est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathcal{R}_n$.
Calculer la norme de chaque fonction $t_p$.

3.3 Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\int_{-1}^{1} \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0$.

**4.** On veut montrer qu'il existe trois réels $a_0, a_1, a_2$ uniques, tels que pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}_5$, on a

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4.1 On suppose que l'égalité (1) est satisfaite par tout $P \in \mathcal{R}_5$. En prenant successivement les polynômes $P$ définis par $P(x) = 1$, $P(x) = x$, $P(x) = x^2$, déterminer les réels $a_0, a_1, a_2$.

4.2 Montrer que le triplet $(a_0, a_1, a_2)$ trouvé convient pour les polynômes $P$ définis par $P(x) = x^4$ puis $P(x) = x^5$.
En déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}_5$.

**5.** calcul d'une intégrale.

5.1 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

5.2 Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$, à l'aide du changement de variable $t = 2x - 1$ et de la formule (1).