Les calculatrices sont autorisées.

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Les parties I et II traitent d'un exemple. Les parties III, IV et V, indépendantes des deux premières, ont pour objet l'étude de propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Pour tout entier p naturel non nul, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n, p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

I.A.1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

I.A.2) On pose :

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$$

Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3) Pour $p \geq 2$, et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n, p)$.

I.A.4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p, pour $p \geq 2$.

I.B - Soient q un entier ≥ 2 et N un entier naturel ≥ 1.
Donner une majoration du reste

$$R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

en le comparant à une intégrale.

Partie II - Un exemple d'accélération de la convergence

II.A -

II.A.1) Montrer par récurrence l'existence de trois suites (a_p), (b_p) et (c_p) d'entiers naturels définies pour $p \geq 2$ telles que, pour tout réel x strictement positif et pour tout entier p on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}$$

II.A.2) Exprimer a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} à l'aide de p, b_p et c_p.

II.A.3) Montrer que : $\forall p \geq 2,\ b_p \geq c_p \geq 0$.

II.A.4) Calculer a_p, b_p, c_p pour $p = 2, 3$ et 4.

II.B - On désire calculer une valeur décimale approchée de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

II.B.1) En utilisant I.B, déterminer un entier naturel N suffisant pour que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ soit inférieur à } \varepsilon.$$

II.B.2) Donner un majorant simple de :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

et montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de ε avec une valeur de N moins grande que celle trouvée à la question II.B.1.

II.B.3) Donner une valeur décimale approchée à ε près (par défaut) de $\zeta(3)$ en utilisant ce qui précède.

Partie III - Séries factorielles

III.A -

III.A.1) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x},\ w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

Montrer que la série de terme général

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right), \text{ définie pour } n \geq 1, \text{ est convergente.}$$

III.A.2) En déduire qu'il existe $l(x)$ (dépendant de x et strictement positif) tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x).$$

III.B - Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes et x un réel strictement positif.
Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} a_n v_n(x)$ est AC.