Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1. On appelle G l'ensemble des applications continues g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)]$$

   (a) Soit g un élément de G.

   - Montrer que $g(0) = 0$.
   - Montrer que g est une fonction paire.
   - Démontrer la propriété :

$$\forall (x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N} \qquad g(nx) = n^2 g(x)$$

   - Que peut-on dire de $g(\frac{p}{q}x)$, où $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^\star$?

   (b) Déterminer l'ensemble G.

2. On se propose ici de retrouver les éléments de G par une autre méthode.
Soit g un élément de G.

   (a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad 2g(x) = \int_0^1 g(x+y)\,dy + \int_0^1 g(x-y)\,dy - 2\int_0^1 g(y)\,dy$$

   (b) Démontrer que g est dérivable. Exprimer $g'(x)$ sans utiliser le symbole $\int$.

   (c) Démontrer que g est deux fois dérivable.

   (d) Retrouver à l'aide de $g''(x)$ les résultats de la question 1-(b)

3. On appelle H l'ensemble des applications h de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad h(x+y) + h(x-y) = 2[h(x) + h(y)] \tag{1}$$
$$\exists \alpha > 0 \qquad \exists A \geq 0 \qquad \forall x \in [-\alpha, \alpha] \qquad |h(x)| \leq A \tag{2}$$

Soit h un élément de H.

   (a) Démontrer que, pour tout $\beta > 0$, h est bornée sur le segment $[-\beta, \beta]$.

   (b) Démontrer la propriété :

$$\forall a \in \mathbf{R} \qquad \exists M \geq 0 \qquad \forall x \in [-1,+1] \cup [a-1, a+1] \qquad |h(x)| \leq M$$

   (c) Démontrer la propriété :

$$\forall (u,n) \in [-1,+1] \times \mathbf{N} \qquad |h(a + \frac{u}{2^n}) - h(a)| \leq \frac{(3 \cdot 2^n - 1)M}{4^n}$$

   (d) En déduire que h est continue en a.

   (e) Montrer que $H = G$.