Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p-x| < \frac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x.

Objectifs.

L'objet du problème est d'une part d'étudier, pour tout entier naturel non nul, l'entier naturel β_n le plus proche de $e^{-1}n!$ et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

I - Les suites α et β.

On définit la suite α par $\alpha_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$$

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente, et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$; en particulier, pour $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $\beta_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et $\rho_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

I.1. Etude de la suite α.

I.1.1 Expliciter α_k pour k dans $[|0,4|]$.

I.1.2 Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2. Etude de la suite β.

I.2.1 Expliciter β_k pour k dans $[|0,4|]$.

I.2.2 Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2.3 Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

I.2.4 Comparer les deux suites α et β.

I.3. Etude de ρ_n.

I.3.1 Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.

I.3.2 Etablir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$. L'inégalité est-elle stricte ?

I.3.3 Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geq 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

I.4. Etude d'une fonction.

On désigne par f la fonction définie et de classe C^1 (au moins) sur l'intervalle $]-1,1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1,1[,\ (1-x)f'(x) - xf(x) = 0$$

I.4.1 Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f. Expliciter $f(x)$ pour tout x de $]-1,1[$.

I.4.2 Justifier l'affirmation : "f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$".

I.4.3 Expliciter $(1-x)f(x)$, puis exprimer pour tout entier naturel n :

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$$

en fonction de n et de x.

I.4.4 En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n, entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

II - Sur $\boldsymbol{\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n}$.

Pour tout entier naturel n, on note :

- $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.
- $J_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$.
- $v_n = (-1)^{n+1} J_n$.

II.1. La série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

II.1.1 Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.2 Etablir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

II.2. Estimation intégrale de δ_n.

II.2.1 Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \tag{1}$$

II.2.2 Déduire de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n.

II.3. Sur la série $\sum\limits_{n\geq 0} \delta_n$.

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \delta_n$; la convergence est-elle absolue ?

II.4. Sur la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.