Partie I-

E est un espace vectoriel réel de dimension quelconque et Id_E l'endomorphisme de E qui à tout $x \in E$ associe x.

1. Prouver que, si u est un projecteur de E, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit u un projecteur de E. Prouver que $Id_E - u$ est aussi un projecteur de E. Comparer $\mathrm{Ker}(Id_E - u)$ et $\mathrm{Im}(Id_E - u)$ à $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
   On note $u' = Id_E - u$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, soit $f = \alpha u + \beta u'$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer f^n au moyen de u et u'.
3. u et v sont deux projecteurs de E. Prouver que $u+v$ est un projecteur si et seulement si $u \circ v = v \circ u = 0$.
   Dans le cas où $u+v$ est un projecteur, prouver que $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
4. Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont des projecteurs et $\mathrm{Ker} u = \mathrm{Ker} v$.

Partie II-

E est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et $B = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est la base usuelle de E.
$(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et u est l'application qui à $M \in E$ associe $u(M) = A_1 M A_2$ où $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} c & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la matrice U de u dans la base B ?
2. A quelle condition u est-il un projecteur de E ?
3. Dans le cas où u est un projecteur, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Partie III-

E est un espace euclidien.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ son orthogonal.

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Prouver que $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
2. u et v sont deux projecteurs orthogonaux de E.
   Prouver que : $u \circ v = 0 \Rightarrow v \circ u = 0$.
   On pourra remarquer que : $u \circ v = 0 \iff \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel et $F = \{X = (x, y, z, t) / x+y+z = 0; x-y+z-t = 0\}$.
   On note $v_1 = (1, -1, 0, 2)$ et $v_2 = (0, 1, -1, -2)$. Justifier que (v_1, v_2) est une base de F et en déduire une base orthonormale de F.
   Ecrire la matrice dans la base usuelle de E du projecteur orthogonal sur F.