Si R est un réel strictement positif, on lui associe dans $\mathbb{R}^2$ les domaines $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < R\}$ et $D'_R = D_R \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
On notera aussi, pour $R = \infty$, $D_\infty = \mathbb{R}^2$ et $D'_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
On identifie, pour simplifier les notations, $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des nombres complexes, par l'isomorphisme canonique.
Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre ; chacune d'elles utilise certains des résultats établis dans la partie I.

Partie I

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_R, à valeurs complexes, et vérifiant sur D'_R la relation (où i désigne le complexe de carré 1) :

$$(\mathcal{H}) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On lui associe la fonction g définie sur $[0,R] \times \mathbb{R}$ par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On remarquera que, pour tout $r \in [0,R]$ fixé, la fonction $\theta \mapsto g(r,\theta)$ est $2\pi-$périodique.

1. Pour $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D'_R$, exprimer les dérivées partielles de f au point (x,y) en fonction des variables r, θ et des dérivées partielles de g.
   Montrer que la relation $(\mathcal{H})$ équivaut à la suivante :
   $$(\mathcal{H}_1) \quad r\frac{\partial g}{\partial r} + i\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0.$$
2. Pour $r \in [0,R[$, et $n \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction c_n par la formule :
   $$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta)e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta.$$
   Montrer que c_n est continue sur $[0,R[$, dérivable sur $]0,R[$ et qu'elle vérifie sur cet intervalle l'équation différentielle : $rc'_n(r) = nc_n(r)$.
   Prouver que c_n est nulle pour $n < 0$, que c_0 est une constante égale à $f(0,0)$ et donner une expression de $c_n(r)$ pour $r \in [0,R[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En utilisant un théorème sur les séries de Fourier, que l'on énoncera avec précision, prouver que f admet sur D_R un développement en série entière de la forme $\displaystyle\sum_0^{+\infty} \gamma_n z^n$, où z désigne le complexe $x+iy$ et les γ_n sont des constantes complexes.
4. Dans cette question, $R = \infty$ et on suppose que f est bornée sur D_∞.
   Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction c_n est bornée sur $[0,+\infty[$. En déduire que f est constante.

Partie II

On conserve les notations précédentes, en fixant ici $R = \dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit $P(x,y) = \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$ et $Q(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$.
   Vérifier que la fonction $f = P + iQ$ vérifie $(\mathcal{H})$. Donner une expression simple de $f(x,0)$ et de $f(0,y)$.
2. Prouver que les fonctions tan et tanh sont développables en séries entières de rayon de convergence ρ au moins égal à $\pi/2$. Si $\tan x = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \gamma_{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, comment s'écrit le développement de $\tanh(y)$?
3. Démontrer que $\rho = \pi/2$.

Partie III

P désigne un polynôme de degré au moins égal à 1 à coefficients complexes. On pourra noter $P(z) = \sum_{0}^{m} a_k z^k$ où $m \in \mathbb{N}^*$ est le degré de P. **On suppose que P n'a aucune racine dans $\mathbb{C}$.**

On associe à P la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_∞ par $f(x, y) = \dfrac{1}{P(x + iy)}$.

1. Démontrer que f vérifie $(\mathcal{H})$.

   On peut donc développer f sur D_∞ sous la forme $\sum_{0}^{+\infty} \gamma_n z^n$.

2. Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \geq A \Rightarrow |P(z)| \geq \dfrac{1}{2}|a_m z^m|$.
   En déduire que f est bornée sur D_∞.
3. Conclure.