IC du 07/02/2011 :

Chap 15 (Séries de Fourier A-B-C) et Chap 16 (Séries entières A-B)

Programme de colle 18

Espaces vectoriels normés (II)

- **Norme $\|.\|_\infty$.**
  Théorèmes d'approximation : des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escaliers, de Weierstrass-1 (par les polynômes), de Weierstrass-2 (par les polynômes trigonométriques).
- **Norme $\|.\|_2$.**
  Fonctions de carré intégrable ; produit de fonctions de L^2 ; inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme $\|.\|_2$ sur les fonctions de $\mathcal{C}^0 \cap L^2$; comparaison avec $\|.\|_\infty$.

Séries de fonctions

- **"Théorème d'intégration terme à terme"** : Si $\sum u_n$ est une série de fonctions intégrables sur I qui converge simplement sur I de somme $f \in CM(I)$ et $\sum \int_I |u_n|$ est convergente, alors ....
  Application aux séries de fonctions du thm de convergence dominée.
- **Convergence normale**, normale sur tout segment.
- **"Transfert de continuité"**.
  Continuité de la somme (avec hypothèse de CV normale sur tout segment) ; thm "de la double limite".
- **"Dérivation terme à terme"**
  CV normale et intégration sur un segment.
  Dérivation de la somme (la série $\sum Du_n$ CV normalement sur tout segment).

Séries de Fourier

- Convergence en moyenne quadratique ; théorème de Parseval ; injectivité de $f \in \mathcal{C}_T \mapsto (c_n(f))$; propriétés des coefficients ($\sum |c_n|^2$ converge ; en particulier, $\lim c_n = 0$).
- Théorème de Dirichlet ; propriétés des coefficients ($\sum a_n$ converge).
- Théorème de convergence normale.
  Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, alors $c_n(f') =$ .... Recherche de solutions périodiques de certaines EDO.
  Si f est $\mathcal{C}^k$ par morceaux et $\mathcal{C}^{k-1}$, alors $c_n(f) = o(1/n^k)$.

Séries entières

- **Définition**, structure.
- **Domaine de convergence**
  - Lemme d'Abel
  - Rayon de convergence ($\sup\{\rho/(a_n\rho^n)$ bornée$\}$)
  - Développement en série entière des fonctions usuelles
  - Opérations : R de la somme, du produit de Cauchy, de la dérivée.

Concernant les séries entières, on se limite cette semaine à la recherche du rayon/domaine de convergence.