Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Pour n entier naturel non nul on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\det(A)$ le déterminant de la matrice A.

Étant donné un espace vectoriel E, on note Id_E l'endomorphisme identité de E.

On note $\mathrm{Im}\ell$ l'image d'un endomorphisme ℓ de E et $\mathrm{Ker}\ell$ son noyau.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note ℓ^k l'endomorphisme de E défini par $\ell^0 = Id_E$ si $k = 0$ et par $\ell^k = \ell \circ \ell^{k-1}$ sinon.

Étant donné une base $\mathcal{B}$ de E on note $Mat_{\mathcal{B}}(\ell)$ la matrice de l'endomorphisme ℓ dans la base $\mathcal{B}$.

Étant donné un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie on note $\dim F$ la dimension de F.

On désigne par $Vect(u, v)$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u et v.

Lorsque E sera un espace euclidien on notera $(.|.)$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire ; on note $O(E)$ le groupe orthogonal de E (c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E) et $F^\perp$ désigne l'orthogonal du sous-espace vectoriel F.

Objectifs

Étant donné un endomorphisme ℓ, pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on définit $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

En prenant différentes hypothèses pour E et pour ℓ on étudie la limite de la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la première partie on étudie cette limite dans deux exemples. Dans la deuxième partie on obtient la limite de la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans un cadre plus général ; cette limite est obtenue à l'aide d'une propriété d'algèbre linéaire que l'on fait établir dans deux contextes généraux différents.

Dans la troisième partie cette propriété algébrique permet d'obtenir un résultat concernant une décomposition des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

PARTIE I : EXEMPLES

La partie **I** permet d'illustrer les résultats établis dans la partie **II** . Elle doit être traitée sans utiliser les résultats de la partie **II**. Les exemples **I.A**, **I.B** et **I.C** sont indépendants les uns des autres.

Dans cette partie E est un espace euclidien de dimension 4, rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

I.A Soit s l'endomorphisme de E défini par sa matrice $Mat_{\mathcal{B}}(s) = S = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

I.A.1 Réduction de l'endomorphisme s.

I.A.1.1 Justifier l'affirmation : l'endomorphisme s est diagonalisable. Calculer la matrice S^2.

I.A.1.2 En déduire que s est un automorphisme orthogonal de E et que 1 et -1 sont ses valeurs propres.

On note E_1 et E_{-1} les sous-espaces propres de s respectivement associés aux valeurs propres 1 et -1. Il résulte des questions précédentes que E_1 et E_{-1} sont des sous-espaces supplémentaires de E.

I.A.1.3 Calculer la trace de s. En déduire la dimension de E_1 et celle de E_{-1}.

I.A.2 On considère les trois vecteurs suivants de E : $u_1 = e_1 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_2 + 2e_4$ et $u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

I.A.2.1 Déterminer les vecteurs $s(u_1)$ et $s(u_2)$. En déduire que (u_1, u_2) est une base de E_1.
Déterminer une base orthonormale de E_1.

I.A..2.2 Déterminer un vecteur non nul $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ orthogonal aux trois vecteurs u_1, u_2 et u_3.
En déduire que (u_3, u_4) forme une base orthogonale de E_{-1}.

I.A.3 Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s^k(x)$.

I.A.3.1 Pour $x \in E$ fixé, on note $x = y + z$ avec $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel α_k tel que $s^k(x) = y + \alpha_k z$.
En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un réel β_n tel que $S_n(x) = y + \beta_n z$.

I.A.3.2 Déduire de ce qui précède que la suite $\Big(S_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Exprimer cette limite en fonction de x et de $s(x)$.

I.B Soit ℓ l'endomorphisme de E défini par sa matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\ell) = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$.

I.B.1 Une propriété concernant les normes.

I.B.1.1 Pour tout vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ de E calculer $\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2$.
Prouver l'inégalité $\|\ell(u)\| \leq \|u\|$.

I.B.1.2 En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur u vérifie l'égalité $\|\ell(u)\| = \|u\|$.
Montrer que 1 est valeur propre de ℓ et que le sous-espace propre associé est de dimension 2.

I.B.2 Réduction de l'endomorphisme ℓ.

I.B.2.1 Déterminer le polynôme caractéristique de ℓ.

I.B.2.2 Montrer que ℓ possède une autre valeur propre $\lambda \neq 1$ que l'on déterminera.
Justifier que les sous-espaces propres G_1 et G_λ de ℓ associés aux valeurs propres 1 et λ sont supplémentaires dans E.

I.B.3 Pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

Soit $x \in E$. On note $x = y + z$ avec $y \in G_1$ et $z \in G_\lambda$.

I.B.3.1 Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer $\ell^k(x)$ en fonction de y, z et k.

I.B.3.2 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ exprimer $L_n(x)$ en fonction de y, z et n.
En déduire que la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

PARTIE II

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel. Étant donné un endomorphisme ℓ de E, pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

II.A Dans cette partie **II.A** on suppose que E est un espace euclidien et que $\ell \in O(E)$.

II.A.1 Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\ell - Id_E)$ et $\mathrm{Im}(\ell - Id_E)$ sont orthogonaux.
En déduire qu'ils sont supplémentaires dans E.
Soit $x \in E$. D'après le résultat précédent il existe $y \in \mathrm{Ker}(\ell - Id_E)$ et $z \in E$ tels que $x = y + \ell(z) - z$.

II.A.2 Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer $\ell^k(x)$ en fonction de y, z et k. En déduire l'expression de $L_n(x)$ en fonction de y, z et n.

II.A.3 Montrer que la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite que l'on déterminera lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite de la partie **II**, étant donné un espace vectoriel normé E on notera $B(E)$ l'ensemble des endomorphismes h de E qui vérifient, pour tout x de E : $\|h(x)\| \leq \|x\|$.

II.B Dans cette partie **II.B** on suppose que E est un espace euclidien. Soit $f \in B(E)$.
Soit $\mathcal{B}_o$ une base orthonormale de E, A la matrice de f dans $\mathcal{B}_o$ et f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}_o$ est ${}^tA$.

II.B.1

II.B.1.a. Montrer que, si $\mathcal{B}'_o$ est une autre base orthonormale de E et A' la matrice de f dans $\mathcal{B}'_o$, alors la matrice dans $\mathcal{B}'_o$ de f^* est ${}^tA'$. (c'est à dire que la définition de f^* est indépendante du choix de la base orthonormale $\mathcal{B}_o$).
Que peut-on dire de $(f^*)^*$?

II.B.1.b. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f^*(y))$.

II.B.1.c. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^* - Id_E) = \big(\mathrm{Im}(f - Id_E)\big)^{\perp}$.

II.B.2 Montrer que f^* appartient à $B(E)$.

II.B.3 Montrer que si $x \in E$ vérifie $f(x) = x$ alors $\|f^*(x) - x\|^2 \leq 0$.
Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(f - Id_E) = \mathrm{Ker}(f^* - Id_E)$.

II.B.4 En déduire que $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - Id_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.

PARTIE III

Dans cette partie E est un espace euclidien et $\ell \in O(E)$. Soit e un vecteur non nul de E. Pour tout $x \in E$ on note $\sigma_e(x) = x - 2\dfrac{(x|e)}{\|e\|^2}e$.

III.1 Calculer $\sigma_e(e)$. Pour x orthogonal à e calculer $\sigma_e(x)$. Montrer que σ_e est un automorphisme orthogonal de E.
σ_e est donc la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal $\big(Vect(e)\big)^{\perp}$.

III.2 On note $W = \mathrm{Ker}(\ell - Id_E)$ et on suppose que W est différent de E. Soit u un vecteur fixé de E tel que $u \notin W$. Dans la suite on choisit $e = \ell(u) - u$.

III.2.1 Montrer que e est orthogonal à W (on pourra utiliser le résultat de **II.A.1**).

III.2.2 Calculer $\sigma_e\Big(\ell(u) - u\Big)$ et $\sigma_e\Big(\ell(u) + u\Big)$. En déduire $\sigma_e\Big(\ell(u)\Big)$ et $\sigma_e(u)$.

III.2.3 Montrer l'égalité $Vect(u) \oplus W = \mathrm{Ker}(\sigma_e \circ \ell - Id_E)$.

III.2.4 En déduire que ℓ peut se décomposer en la composée de p réflexions et exprimer p en fonction de $k = \dim W$ et de $n = \dim E$.