1. (a) On définit $A = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

   i. Chercher les valeurs propres de A.

   ii. A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

   (b) S est une matrice stochastique si tous ses éléments sont strictement positifs et la somme des éléments d'une ligne quelconque est égale à 1.
   On note $\|X\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |X_i|$ pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}$.

   i. Montrer que 1 est valeur propre de S et donner un vecteur propre associé U tel que $\|U\| = 1$.

   ii. Conjecturer l'ordre de multiplicité de 1.

   iii. Montrer que toute valeur propre réelle ou complexe est de module inférieur ou égal à 1.

   (c) On note $\tilde{A}$ la transposée de A et on définit une suite par $X_0 = X$ et $X_{n+1} = \tilde{A}X_n$.
   Que peut-on conjecturer concernant le vecteur limite ? Le démontrer.

   (Centrale-PC(Chau)) O18-901

2. On considère un triangle ABC tel que : $AB = r; BC = l; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta$.

   (a) A l'aide d'un produit scalaire, exprimer AC en fonction de r, l, θ.

   (b) Dans toute la suite, on suppose $0 < |\lambda| < 1$.
   Soit $Z(\lambda, \theta) = \cos\theta + \dfrac{1}{\lambda}(1 - \lambda^2(\sin\theta)^2)^{1/2}$.

   i. Montrer que : $Z(\lambda, \theta) = \dfrac{1}{\lambda} + \cos\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{2k-1} u_k(\theta)$.

   ii. Avec Maple, tracer les fonctions :
   $\theta \mapsto Z(\lambda, \theta)$,
   $\theta \mapsto Z_n(\lambda, \theta) = \dfrac{1}{\lambda} + \cos\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda^{2k-1} u_k(\theta)$ pour $n = 2$ et $n = 5$,
   pour $\lambda = 0,33; 0,9; 0,99$.

   (c) Majorer $|Z(\lambda, \theta) - Z_n(\lambda, \theta)|$. (On pourra utiliser le reste d'une série géométrique)

   (d) On s'intéresse maintenant à la série de Fourier de Z.

   i. Caractériser la série de Fourier de Z. Pouvez-vous calculer directement les coefficients de Fourier de la fonction ?

   ii. Avec Maple, calculer la somme de la série de Fourier de Z à $\dfrac{10^{-5}}{2}$ près.

   (Centrale-PC(Sou)) O18-902

3. On considère $P_c(X) = X^2 + c$ où $c \in \mathbb{C}$. On a donc $P'(X) = 2X$ son polynôme dérivé.
   On définit la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ par : $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$.
   Enfin on note M l'ensemble des points d'affixe c tels que (z_n) soit bornée.

   (a) Montrer que M est symétrique par rapport à l'axe des réels. On utilisera la suite $(\overline{z_n})$.

   (b) i. Calculer les 40 premiers termes de (z_n) pour $c = -2,001, c = -2, c = -1,5, c = 0,25$ et $c = 0,26$.

   ii. Même question pour $c = -1,75 + 0,45i$ et pour $c = ?? - 1 + 0.15i$. Que peut-on alors conjecturer ? Quels sont les points tels que $c \in M$?

   (c) i. On suppose que (z_n) converge. Déterminer ses deux limites possibles l_1 et l_2.
   On posera $c = 1/4 - \rho e^{i\theta}$.

   ii. Montrer que si $\rho < 1/2(1 + \cos\theta)$, alors $|P_c'(l_1)| < 1$ ou $|P_c'(l_2)| < 1$.

   iii. ? ? On suppose que $\rho > 1/2(1 + \cos\theta)$. Montrer que la suite (z_n) peut être bornée mais pas convergente.

   (d) ? ? Soit (u_n) définie par $u_0 = |c|,\ u_{n+1} = u_n^2 - |c|$. Prouver que, si $|c| > 2$, alors $\lim u_n = +\infty$. En déduire que $M \subset \overline{B}(0, 2)$.

   (Centrale-PC(Biz)) O18-903

4. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $r_0 = 1; r_{2n} = r_n; r_{2n+1} = (-1)^n r_n$.
   (a) i. Calculer r_n pour $n \in [\![0, 30]\!]$.
   ii. Que vaut r_n quand n est une puissance de 2 ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} r_k e^{ikt}$.
   i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists M_n = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)|$.
   ii. On définit un produit scalaire $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ sur l'espace des fonctions continues $2\pi-$périodiques.
   A. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_2 = \sqrt{n}$.
   B. On définit $S_n = \dfrac{f_n}{\sqrt{n}}$.
   Tracer sur le même graphe dans le repère complexe les courbes paramétrées par S_n pour $n \in [\![1, 20]\!]$ et le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{6}$. (On pourra utiliser complexplot)
   iii. ? ?
   (c) ? ?
   (Centrale-PC(Grz)) O18-904
5. Réduire $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $f(X) = (AX|X) - 2(B|X)$ admet-elle des extrema ? Si oui, les calculer.
   Nature de $f(x, y, z) = k$ et tracer quelques unes des surfaces.
   Montrer que $\phi(A)$ défini par $\phi(A)(X, Y) = (AX|Y)$ est un produit scalaire.
   manque fin *Centrale* O18-C043
6. Tracer $\Gamma : x^2 + 2xy + 4y^2 - 1 = 0$ et $\Gamma' : \begin{cases} x(t) = \cos t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases}$. Que peut-on dire ? Comment montrer qu'elles sont égales ?
   Calculer le rayon de courbure en un point de Γ'.
   On effectue un paramétrage normal de Γ ; montrer que $x'^2 + y'^2 = 1$ et que $(x + y)x' + (x + 4y)y' = 0$.
   Calculer les vecteurs T et N du repère de Frenet en fonction de x et y. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ et le rayon de courbure en un point de Γ. Le comparer à celui trouvé pour Γ'. *Centrale* O18-C047