

1. Arcs paramétrés

Tracer $\Gamma : x^2 + 2xy + 4y^2 - 1 = 0$ et $\Gamma' : \begin{cases} x(t) = \cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t \\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t \end{cases}$. Que peut-on dire ? Comment montrer qu'elles sont égales ?

Calculer le rayon de courbure en un point de Γ' .

On effectue un paramétrage normal de Γ ; montrer que $x'^2 + y'^2 = 1$ et que $(x+y)x' + (x+4y)y' = 0$.

Calculer les vecteurs T et N du repère de Frenet en fonction de x et y . Calculer $\frac{dT}{dt}$ et le rayon de courbure en un point de Γ . Le comparer à celui trouvé pour Γ' . *Centrale*

O18-C047

2. Quadriques

Dans l'espace affine usuel, muni de son repère canonique, on donne les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et les points $A(2, 3, 4)$ et $B(-1, 1, 1)$.

(a) La droite D_1 dirigée par u , passant par A , et la droite D_2 dirigée par v , passant par B , sont-elles coplanaires ? Les tracer sur un même graphe.

(b) Soit $M(x, y, z)$; calculer $d_1(M, D_1)$ et $d_2(M, D_2)$.

Tracer $S = \{M(x, y, z) / d_1(M) = d_2(M)\}$ et en déduire sa nature.

(c) Tracer D_1, D_2 et S sur un même graphe.

(d) Trouver un repère dans lequel S est réduite et donner son équation.

Comment trouve-t-on le centre d'une quadrique ?

Quelle est l'équation réduite d'un paraboloides hyperbolique ?

Centrale

O20-113

3. Autres surfaces

Tracer la courbe d'équation $f(x, y) = y^2(5 + \sqrt{2}y) - 3x^2(y + \sqrt{2}) = 0$.

Déterminer ses points doubles et les points pour lesquels $\vec{\text{grad}} f = 0$. Que remarque-t-on ?

Tracer la surface S d'équation $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 1$.

Déterminer sa direction d , puis donner son équation dans un repère orthonormé direct du type (O, v_1, v_2, d) .

Trouver la courbe C intersection de S et d'un plan orthogonal à d et faire le lien avec la courbe étudiée en premier lieu. *Centrale*

O18-082

4. ODE non linéaires

Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy : $y' = \frac{\cos y}{1+y^2}$, $y(0) = 0$.

On note I son intervalle de définition.

Tracer y avec le logiciel de calcul formel.

Montrer que y est bornée. Quelles sont ses variations ?

Préciser I . Etudier la parité et la concavité de y . A-t-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

Donner son développement limité en 0 à l'ordre 9. *Centrale*

O19-079