1. **dsolve, series, convert(...,polynom)**
Résoudre $y'' = (1+x)y' + y$ et tracer quelques courbes pour $y(0) = 1$.
Donner le développement de Taylor à l'ordre 16 de la solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$. Quelle conjecture peut-on émettre ?
On pose $I_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n$ le nombre d'applications $f$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, vérifiant $f \circ f = Id$. Montrer que $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
Calculer $I_n$ pour $n \in \llbracket 1, 15 \rrbracket$.
Montrer que le rayon de convergence $R$ de $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est non nul.
Pour $x \in ]-R, R[$, montrer que la somme $F(x)$ de cette série vaut $\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$. Donner $I_n$ en fonction de $n$ et vérifier avec Maple. *Centrale* O18-092

2. **dsolve**
Soient les équations différentielles $(E) : y'' + \mathrm{e}^{ix} y' + y = \mathrm{e}^{-ix}$ et $(E_0) : y'' + \mathrm{e}^{ix} y' + y = 0$.
Soit $y$ une solution définie sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique de l'une ou l'autre des équations. Montrer que $y$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Justifier l'existence de coefficients $c_n$, $n \in \mathbb{Z}$, tels que :
$y(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n} \mathrm{e}^{inx}]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Justifier que $\lim_{n \to +\infty} n^k c_n = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $y$ une solution définie sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$ périodique de $(E_0)$.
Trouver une relation entre $c_n$ et $c_{n-1}$.
Exprimer $c_n$ en fonction de $c_0$ et de $c_1$.
Exprimer $y_1$ correspondant à $(c_0, c_1) = (0, 1)$ et $y_2$ correspondant à $(c_0, c_1) = (1, 0)$. Vérifier les réponses avec le logiciel de calcul.
Résoudre $(E)$ par la méthode de variation des constantes à l'aide de $y_1$ et de $y_2$. Vérifier la réponse avec le logiciel de calcul.
(Centrale-PC) O17-C029

3. **dsolve**
Soit l'équation différentielle $(E) \quad 9(1-x^2)y" - 9xy' + y = 0$.
   (a) Sur quels intervalles l'ensemble des solutions est-il de dimension 2 ?
   (b) i. Avec Maple, résoudre $(E)$ sur $]-1, 1[$.
      ii. Trouver une solution $g$ continue sur $[-1, 1]$ telle que $g(0) = 1/2$ et telle que $g$ soit $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1]$.
      iii. Est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ ?
      iv. Vérifier qu'elle est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1]$.
   (c) A l'aide de $(E)$, trouver un développement en série entière de $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x + \frac{\pi}{6}\right)$.

   (Keis-Centrale) O17-963

4. **DEtools, dsolve, DEplot**
Justifier l'existence et l'unicité de $x$ et $y$, solutions du système différentiel $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2x^2(t) + 3x(t) + 1}{y(t)} \\ y'(t) = -2x(t) - 2 \\ x(1) = -\dfrac{2}{3},\ y(1) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.
Tracer le champ de vecteurs (on pourra utiliser Maple et la bibliothèque DEtools, ainsi que DEplot) ; peut-on en déduire la courbe intégrale ?
On pose $f(t) = x(t)y(t)$ ; calculer $f'(t)$ et en déduire $f$, puis montrer que $y$ vérifie $(E) : y'(t) = -\frac{1}{2y(t)} - 1$.
Trouver $x$ et $y$ à l'aide de Maple et tracer la courbe.
Montrer que $y$ est développable en série entière, $y = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$.
Trouver $a_i$, $0 \leq i \leq 10$. (Centrale-PC) O17-073