1.

Partie II. Manipuler les permutations

La *période* d'un indice i pour la permutation t est définie comme le plus petit entier k non nul tel que $t^k(i) = i$.

Question 6 Écrire une fonction periode(t,i) qui prend en arguments une permutation t et un indice i et qui renvoie la période de i pour t.

L'orbite de i pour la permutation t est l'ensemble des indices j tels qu'il existe k avec $t^k(i) = j$.

Question 7 Écrire une fonction estDansOrbite(t,i,j) qui prend en arguments une permutation t et deux indices, et qui renvoie vrai si j est dans l'orbite de i et faux sinon.

Une transposition est une permutation qui échange deux éléments *distincts* et laisse les autres inchangés.

Question 8 Écrire une fonction estTransposition(t) qui prend une permutation t en argument et renvoie vrai si t est une transposition et faux sinon.

Un cycle (simple) est une permutation dont exactement une des orbites est de taille strictement supérieure à un. Toutes les autres orbites, s'il y en a, sont réduites à des singletons.

Question 9 Écrire une fonction estCycle(t) qui prend une permutation t en argument et renvoie vrai si t est un cycle et faux sinon.

2. **plot([...],x=...,legend=[...])**
Soit (f_n) définie par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^n}}\ \mathrm{d}t$; calculer $f_n(0)$.
Calculer $f_2(x)$ pour $x \in \{1,2,3,4,5\}$ puis dans le cas général.
Tracer f_n pour $n \in \{1,2,3,4,5\}$ et pour $x \in [\![0,3]\!]$. Commenter.
Donner le domaine de définition de f_n et étudier la continuité de f_n sur son domaine de définition. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Trouver une équation différentielle vérifiée par f_2 ; retrouver ce résultat par calcul direct. *Centrale* O18-086
3. **with(IntegrationTools),Change,assume, convert(...,parfrac)**
Montrer que $f_1(t) = \dfrac{\ln t}{(t+1)(t+2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Calculer avec Maple $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)\ \mathrm{d}t$.
Effectuer le changement de variable $t = \phi(u) = \dfrac{2}{u}$ avec Maple et recalculer l'intégrale.
On pose $f_2(t) = \dfrac{\ln t}{(t+1)(t+2)(t+3)}$; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(t)\ \mathrm{d}t$.
Soient $a > 0$ et $f_3(t) = \dfrac{\ln t}{(t+a)^2}$; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_3(t)\ \mathrm{d}t$.
Pour $b > 0$, ab on pose $f_4(t) = \dfrac{\ln t}{(t+a)(t+b)}$; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_4(t)\ \mathrm{d}t$.
Soient $a = (a_i)_{i \geq 2}$, $a_i > 0$ tels que si $i \neq j$, $a_i \neq a_j$.
Soit $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t+a_i)}\ \mathrm{d}t$.
Dans le cas où $a_i = i$, calculer $I_n(a)$ avec Maple, pour $2 \leq n \leq 10$.
Dans le cas général, avec un changement de variable judicieux, calculer $I_2(a)$.
Trouver α et β tels que $\dfrac{1}{(t+a_{n+1})(t+a_n)} = \dfrac{\alpha}{t+a_n} + \dfrac{\beta}{t+a_{n+1}}$.
Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}(a)$, $I_n(a)$ et $I_n(a')$, avec $a'_i = a_i$ si $i \neq n$ et $a'_n = a_{n+1}$.
Calculer $I_3(a)$. Calculer $I_n(a)$, pour $2 \leq n \leq 10$ et $a_i = i$.
(Centrale-PC) O17-C035
4. **assume, factor**
Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\ \mathrm{d}t$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble.
Tracer f avec le logiciel ; que peut-on dire ?
Etablir une conjecture quant à la limite de f en $+\infty$.
Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.
A l'aide du logiciel, calculer les coefficients de Fourier exponentiels de g, 2π-périodique, définie par $g(t) = \mathrm{ch}(tx)$ sur $[-\pi, \pi]$ et retrouver la somme obtenue pour f. (Centrale-PC) O17-085