1. **Matrix(...,shape=Circulant,...),Eigenvalues,seq(...)**

   (a) On définit $A = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1\end{pmatrix}$.

      i. Chercher les valeurs propres de A.

      ii. A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

   (b) S est une matrice stochastique si tous ses éléments sont strictement positifs et la somme des éléments d'une ligne quelconque est égale à 1.
   On note $\|X\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |X_i|$ pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}$.

      i. Montrer que 1 est valeur propre de S et donner un vecteur propre associé U tel que $\|U\| = 1$.

      ii. Conjecturer l'ordre de multiplicité de 1.

      iii. Montrer que toute valeur propre réelle ou complexe est de module inférieur ou égal à 1.

   (c) On note $\tilde{A}$ la transposée de A et on définit une suite par $X_0 = X$ et $X_{n+1} = \tilde{A}X_n$.
   Que peut-on conjecturer concernant le vecteur limite ? Le démontrer.

   (Centrale-PC(Chau)) O18-901

2. **Eigenvectors, Transpose**

   Soit f endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix}59 & -26 & 10\\ 188 & -83 & 32\\ 140 & -62 & 24\end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E. Déterminer les droites stables par f.
   Soit P un plan d'équation (coordonnées dans $\mathcal{B}$) $ax+by+cz=0$.
   On note φ l'application qui à un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées x, y, z dans $\mathcal{B}$ associe $\varphi(\overrightarrow{u}) = ax+by+cz$.
   Montrer que P est stable par f si et seulement si il existe un réel k tel que $\varphi \circ f = k\varphi$. En déduire que P est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. Déterminer tous les plans stables par f.

   Cent-Demon O16-962

3. **DiagonalMatrix**

   Avec Maple : soit $B \in \mathbb{R}^n$, A une matrice carrée d'ordre n dont aucun coefficient diagonal n'est nul.
   Pour $U \in \mathbb{R}^n$ donné, on considère la suite (Y_m) définie par $Y_0 = U$ et $Y_m = (y_i^{(m)})_{1\leq i\leq n}$ avec

   $$y_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{i,j}y_j^{(m)}\right).$$

   Montrer que si (Y_m) converge, alors la limite est solution du système $AX = B$.
   Calculer les 20 premiers termes d'une telle suite avec :
   $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & -7\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.
   Recommencer avec $A = \begin{pmatrix}-12 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 13 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 15 & 5\\ 4 & 5 & 6 & -17\end{pmatrix}$ (on pourra introduire $D = diag(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$ et la fonction qui prend en argument A, B, X et qui renvoie $D^{-1}\big(B-(A-D)X\big)$).
   Donner une CNS sur A pour que la suite $(Y^{(m)})_m$ converge quelque soit U.

   Cent O16-C054