

# Mathématiques 2

## Présentation de l'épreuve

L'épreuve de Mathématiques II commence par une préparation d'environ 30 minutes suivie d'un oral d'une durée équivalente.

Au début de la préparation, l'examineur remet au candidat un énoncé faisant appel à des notions de mathématiques conformes aux programmes des deux années de classes préparatoires, comportant plusieurs questions et nécessitant l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Le candidat peut aussi à tout moment utiliser sa calculatrice personnelle.

Lors de sa préparation, le candidat dispose de feuilles de brouillon et d'un ordinateur sur lequel sont installés les deux logiciels Maple et Mathematica. Cette année, les versions proposées étaient la version 8 de Mathematica et les versions 9 et 14 de Maple. Le candidat doit répondre dans l'ordre aux questions posées, en utilisant librement et à bon escient le logiciel, que cela soit ou pas précisé explicitement dans le texte.

À l'issue du temps de préparation, le candidat est amené à présenter à l'examineur les résultats qu'il a obtenus. Selon le sujet, cette présentation peut se faire intégralement devant l'écran, ou donner lieu à des allers-retours entre l'ordinateur et le tableau. L'examineur évalue la qualité de la pratique mathématique dans le contexte du sujet étudié, au regard des prestations des autres candidats. Dans cette évaluation, une place importante est donnée à l'usage de l'outil informatique, tant du point de vue de son efficacité que de sa pertinence.

## Analyse globale des résultats

Cette année encore, la plupart des candidats ont préparé sérieusement cette épreuve : l'outil informatique paraît familier, les instructions les plus courantes sont connues et les syntaxes en général correctes (ou à peu près). Ils semblent donc avoir consacré du temps à sa pratique pendant les années de préparation.

Lors de l'épreuve, il s'agit d'organiser les connaissances et les savoir-faire et de les adapter aux situations proposées : définir les objets les plus pertinents face au problème posé, choisir le bon outil et savoir l'utiliser à bon escient.

Certaines prestations ne sont pas satisfaisantes, parce que les notions mathématiques sous-jacentes ne sont pas maîtrisées, pas comprises voire pas connues. Un autre écueil est une trop grande méconnaissance du logiciel ou une trop grande imprécision dans son utilisation. Mais il y a aussi de très bonnes prestations, qui sont bien sûr appréciées à leur juste valeur.

## Commentaires et conseils aux candidats

Même si c'est parfois le cas, on n'attend pas du candidat qu'il ait résolu la totalité de l'exercice proposé durant le temps de préparation. Lors de la présentation orale, l'échange avec l'examineur pourra lui permettre de progresser dans sa réflexion. Il devra être attentif à ses remarques, réagir et s'adapter à celles-ci de manière pertinente. En tout état de cause, c'est l'examineur, et lui seul, qui gère le temps de l'interrogation, insistant sur certains points, ou demandant certaines justifications ou précisions.

Les candidats doivent soigner la qualité de leur présentation tant au tableau que sur la feuille informatique. La clarté dans l'écriture de leurs programmes et instructions sera un atout pour y déceler d'éventuelles erreurs et progresser dans la résolution. Il va de soi qu'ils doivent également être attentifs à leur attitude et leur vocabulaire, mais c'est déjà le cas pour quasiment la totalité d'entre eux.

On attend évidemment du candidat des connaissances mathématiques fiables, précises et solides. Les raisonnements, pertinents et conformes au programme, doivent être justifiés par une référence claire et adaptée : noms, hypothèses et conclusions des théorèmes utilisés ; lorsqu'un candidat utilise des notions ou des résultats en dehors du cadre fixé par les programmes, il doit être capable de les établir lui-même, d'en mesurer la portée et surtout de s'en passer.

En ce qui concerne l'outil informatique, lorsque le candidat travaille en Maple, le choix entre l'une ou l'autre version de ce logiciel (9 ou 14) est libre. Mais il lui est évidemment conseillé de choisir celle (ou la plus proche de celle) sur laquelle il a travaillé durant l'année.

Une maîtrise parfaite de l'outil informatique dans toute sa richesse, sa subtilité et sa complexité n'est évidemment pas ce qui est attendu du candidat. Cependant un minimum de familiarité, voire d'aisance, avec le logiciel est indispensable pour pouvoir l'utiliser à bon escient. On ne rencontre quasiment plus, et c'est une bonne chose, de candidats ne l'ayant jamais utilisé, mais nombre d'entre eux ne sont pas très à l'aise.

Aucun document n'est autorisé pendant l'oral mais le logiciel est doté d'une aide que le candidat a parfaitement le droit d'utiliser tant pendant sa préparation que pendant son passage. Il devra évidemment réfléchir sur la pertinence de l'utilisation de telle ou telle instruction, tant par la lecture des éventuels exemples proposés par le logiciel que par celle trop souvent oubliée du descriptif de la commande.

Pour cette lecture, comme pour l'interprétation des messages d'erreur, un minimum de compréhension de l'anglais est nécessaire, et on constate bien souvent des lacunes à cet égard à l'origine de contresens dommageables ...

De trop nombreux candidats ne cherchent d'ailleurs même pas à lire les messages d'erreurs ni même (et c'est un comble) les réponses rendues par la machine à leurs instructions. On attend évidemment de leur part une réaction, un commentaire, voire une interprétation ou une critique à la réponse du logiciel (*a fortiori* quand celle-ci semble surprenante ou inexacte). Les instructions « simplify » de Maple et « FullSimplify » de Mathematica qui permettent bien souvent de voir plus clair dans ces réponses sont bien souvent sous-employées voire méconnues.

L'utilisation du logiciel par certains candidats se résume à de simples instructions de calcul d'expressions qu'ils ont commencé à effectuer « à la main ». Le manque d'aisance pousse même certains à réaliser la totalité du travail sur papier avec à la clé des erreurs inévitables, quand d'autres expliquent comment on « pourrait faire avec l'ordinateur » sans écrire une seule ligne de code ... Un bon nombre use et abuse du « copier-coller » alors qu'il serait infiniment plus clair et surtout plus fiable de donner des noms aux expressions calculées et d'utiliser les variables ainsi obtenues dans les calculs suivants : nombre d'erreurs de copies ou de parenthèses oubliées seraient ainsi évitées. Dans le même ordre d'idée, certains écrivent d'énormes lignes d'instructions, alors qu'il serait beaucoup plus clair et plus fiable de segmenter les commandes et de stocker dans des variables les résultats intermédiaires.

Même si le niveau algorithmique des candidats reste assez faible (très peu écrivent volontiers des séquences ou des procédures quand c'est nécessaire), on peut noter une plus grande aisance

dans l'utilisation de certaines structures de programmation comme les boucles. Certains candidats ont cependant encore peur d'écrire des lignes de commandes et s'entourent de mille précautions avant d'appuyer sur « entrée », alors que le travail sur logiciel permet justement une démarche expérimentale avec laquelle on peut adapter sa stratégie en fonction des réponses obtenues.

Citons également quelques erreurs fréquentes :

- la différence entre expression et fonction est bien souvent mal maîtrisée ce qui amène à de nombreuses erreurs ;
- la définition d'une fonction (du type  $f := x \rightarrow \dots$ ), et *a fortiori* d'une fonction de plusieurs variables, est souvent mal connue, et les candidats sont souvent surpris de voir que le logiciel Maple n'évalue pas la valeur prise par une fonction lors de sa définition ;
- dans le même ordre d'idée, peu de candidats utilisant le logiciel Mathematica connaissent et savent utiliser les deux types d'affectation avec évaluation immédiate ou retardée ( $=$  et  $:=$ ) ;
- certains candidats ne semblent pas savoir qu'il est possible d'effectuer une boucle en dehors d'une procédure et se sentent obligés d'en créer une alors que c'est bien souvent inutile ;
- certains ne maîtrisent absolument pas les outils d'algèbre linéaire de Maple, mélangent les deux bibliothèques existantes et se retrouvent avec des soucis inextricables de types d'objets incompatibles (un vecteur pouvant être alors pour eux indifféremment de type `list`, `vector`, `Vector`, voire une matrice ligne ou colonne) ;
- il faut savoir faire la différence entre valeur exacte et approchée, voir qu'une réponse en valeur exacte a souvent valeur de preuve alors qu'une réponse en valeur approchée ne permet que d'émettre une conjecture ;
- il est aussi essentiel de réfléchir à la nature du problème posé. Les fonctions du logiciel Maple `solve`, `fsolve`, `rsolve` et `dsolve`, si elles effectuent toutes une résolution d'équation, ne s'utilisent évidemment pas indifféremment.

Rappelons enfin les principales compétences attendues dans l'utilisation du logiciel :

- programmer une instruction séquentielle, conditionnelle ou itérative en cas de besoin ;
- effectuer des manipulations élémentaires sur les nombres entiers, les nombres réels (partie entière entre autres), les nombres complexes, les polynômes, les expressions en général ;
- effectuer des calculs (formels ou numériques) concernant les notions du programme (limites, dérivées, développements limités et asymptotiques, équivalents, intégrales, suites, séries et sommes partielles, etc.) ;
- définir une expression, une fonction, un tableau et travailler sur ces objets, en les utilisant avec pertinence si l'on veut éviter certains problèmes d'évaluation ;
- résoudre des équations ou des systèmes d'équations (de manière exacte ou approchée), des inégalités, des équations ou des systèmes différentiels, des équations aux dérivées partielles ;
- obtenir des tracés (courbes planes, courbes de l'espace, surfaces définies par équations ou par paramétrages, suites de points, polygones, en sachant gérer les problèmes d'échelles, les discontinuités, en adaptant les fenêtres, et augmentant éventuellement la précision du tracé) ;
- effectuer des manipulations élémentaires d'algèbre linéaire et bilinéaire (matrices, avec en particulier extraction d'un coefficient, systèmes linéaires, normes) et utilisation élémentaire des

fonctions relatives au calcul vectoriel et matriciel, notamment pour ce qui concerne la réduction des matrices, sans sortir du programme.

En ce qui concerne les notions et méthodes mathématiques mises en jeu, on pourra se référer aux rapports des années précédentes concernant la même épreuve. Les remarques qui y étaient faites sont toujours d'actualité. Le jury se permet néanmoins d'insister sur les points suivants.

Un certain nombre de candidats se contentent d'un vocabulaire imprécis voire incorrect : ils confondent termes et facteurs, parlent d'une « limite qui tend vers ... », confondent parenthèse, crochet, accolade et chevron, écorchent ou échantent les noms des mathématiciens (quand ils ne les ont pas oubliés). Enfin, et de manière plus anecdotique, on rencontre aussi un grand nombre de candidats qui confondent les noms des lettres de l'alphabet grec. Tous ces points ne sont pas très graves en soi, mais peuvent être le reflet d'un manque de rigueur plus profond et plus gênant pour leur pratique mathématique.

Les notions fondamentales concernant les courbes planes (points réguliers, tangentes, branches infinies, abscisses curvilignes, courbure) sont souvent mal connues ou peu comprises. L'utilisation de coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques est difficile. Dans l'espace, entre les courbes (paramétrées ou intersection de surfaces), les surfaces définies par paramétrage ou par équation, il y a parfois confusion. L'obtention du plan tangent en un point régulier d'une surface donnée par un paramétrage ou par une équation amène bien souvent à des réponses fantaisistes. Les surfaces usuelles sont souvent mal connues : l'identification des quadriques à partir d'une équation du second degré reste peu sûre.

L'orthonormalisation de Gram-Schmidt est souvent mal connue ou mal comprise. Sa mise en œuvre à l'aide de l'outil informatique avec un produit scalaire quelconque est impossible pour beaucoup de candidats. Les recherches de projetés orthogonaux posent elles aussi souvent problème.

L'utilisation des théorèmes permettant l'échange de limite (ou de somme) avec une intégrale est souvent hésitante. Le théorème de dérivation des séries entières est souvent appliqué de manière automatique « en supprimant le premier terme » sans vérifier si la série initiale possédait un terme constant ou pas.

Beaucoup de techniques acquises en principe pendant les études secondaires et toujours utiles ne semblent plus disponibles pour beaucoup de candidats. Par exemple, le calcul des coordonnées du milieu d'un segment tout comme la moyenne arithmétique de deux réels amènent régulièrement à des erreurs grossières. Les formules élémentaires de trigonométrie font souvent défaut. L'obtention d'une équation cartésienne ou paramétrique de droite à partir des coordonnées de deux de ses points ou d'un point et d'un vecteur directeur sont souvent des exercices insurmontables.

Donnons pour finir quelques recommandations générales.

Il est conseillé de lire attentivement l'énoncé remis. S'il est important d'avoir à son actif un certain nombre de méthodes toutes prêtes, il faut néanmoins réfléchir à la pertinence, face au sujet traité, de leur utilisation : que penser du candidat qui va consciencieusement chercher à reconnaître la matrice d'une rotation en calculant le produit avec sa transposée, sa trace, cherchant les vecteurs propres avec le logiciel alors que celle-ci était déjà donnée sous sa forme réduite ? Certains candidats semblent très fiers de techniques plus ou moins sophistiquées, mais parfois inadaptées, alors qu'un retour à la définition des notions étudiées ou un recours à un théorème du programme donnerait une résolution simple et efficace.

Il est bon de tenir compte des interventions de l'examinateur, qu'elles soient de simples demandes de précisions, des suggestions pour rendre le travail plus efficace, ou qu'elles soient faites pour attirer

L'attention du candidat sur les éventuelles difficultés soulevées par ce qu'il vient de dire, d'écrire, de faire. On attend aussi que le candidat fasse preuve de bon sens et réagisse naturellement face à des résultats absurdes. En tout état de cause, il vaut mieux dire ne pas savoir répondre immédiatement à une question et prendre le temps de la réflexion que se précipiter et invoquer un argument dont on sait pertinemment qu'il est faux.

Les candidats doivent aussi être conscients que le sujet qui leur est proposé présente une unité : il ne doit pas être appréhendé, ni présenté, comme une suite d'exercices indépendants ; et les différentes questions qui le composent doivent être abordées dans l'ordre. À cet égard, les tentatives de « grappillage de points » en traitant quelques questions éparses, si elles peuvent parfois être efficaces à l'écrit, n'ont pas leur place à l'oral. La mise en valeur des liens entre les différentes parties d'un sujet par un candidat sachant faire preuve de recul est appréciée par les examinateurs. *A contrario*, s'enfermer dans cette logique en voulant absolument résoudre une question en utilisant le résultat obtenu à la précédente est également néfaste. On attend aussi du candidat une certaine ouverture d'esprit et du bon sens.

## Conclusions

L'utilisation de l'outil informatique permet par la puissance du calcul formel, du calcul numérique, ou par la visualisation de situations, de manipuler des objets habituellement hors de portée et d'émettre des conjectures. Le candidat, libéré du poids du calcul et des risques d'erreurs qui y sont liés, peut ainsi obtenir des résultats explicites exploitables dans nombre de situations. Pour y parvenir, on attend de lui des connaissances solides et fiables, une maîtrise minimale du logiciel, de la rigueur, de la réflexion et du bon sens.

C'est la capacité d'intégrer tous ces paramètres dans une réflexion rigoureuse, imaginative et pertinente soutenue par une technique efficace, qui est évaluée.

Cinq sujets donnés cette année seront mis sur le site internet du concours pour permettre aux candidats de se préparer dans les meilleures conditions à la prochaine session.