Il semble que (A^n) ait pour limite 0 et que $A_{100}^2 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les droites vectorielles stables par f sont les droites de vecteurs propres (4 droites complexes, 2 droites réelles).
$\ker(f - Id)$ est dirigé par $(1, 0, 0, 1)$; les 4 colonnes de $A - I_4$ sont orthogonales à ce vecteur d'où l'existence de la somme directe orthogonale ; le thm du rang prouve que la somme est E. Et de même pour $\ker(f - 1/2.Id)$ qui est dirigé par $(0, 1, 1, 0)$.
La base dans $\mathbb{C}^4$ $(u_1, \overline{u_1}, u_3, u_4)$ donne une base réelle $(u_4, u_3, (u_1 + u_2), i(u_1 - u_2))$ dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée avec $\alpha = 1/2, r = \sqrt{2}/2, \theta = \pi/2$.
$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} 1^k \to 1$, $\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}(1/2)^k \to 0$, $\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}(\exp(ik\pi/2) \to 0$ d'où la limite de (g_n).

O20-111

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> a:=Matrix(4,4,[[1,sqrt(3),-sqrt(3),3],[-sqrt(3),2,0,sqrt(3)],[sqrt(3),0,2,-sqrt(3)],[3,-sqrt(3),sqrt(3),1]])/4;
```

$$a := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

```
> a := Eigenvectors;
> b:=n->sum(a^k,k=0..n-1)/n;
```

$$b := n \to \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a^k}{n}$$

```
> b(1);evalf(simplify(b(10))),evalf(simplify(b(20))),evalf(simplify(b(100)));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5171875000 & 0.02976962326 & -0.02976962326 & 0.4828125000 \\ -0.02976962326 & 0.1514648438 & 0.04833984375 & 0.02976962326 \\ 0.02976962326 & 0.04833984375 & 0.1514648438 & -0.02976962326 \\ 0.4828125000 & -0.02976962326 & 0.02976962326 & 0.5171875000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.5083251953 & 0.01441966127 & -0.01441966127 & 0.4916748047 \\ -0.01441966127 & 0.07497553825 & 0.02502436638 & 0.01441966127 \\ 0.01441966127 & 0.02502436638 & 0.07497553825 & -0.01441966127 \\ 0.4916748047 & -0.01441966127 & 0.01441966127 & 0.5083251953 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.5016666667 & 0.002886751347 & -0.002886751347 & 0.4983333333 \\ -0.002886751347 & 0.01500000000 & 0.005000000000 & 0.002886751347 \\ 0.002886751347 & 0.005000000000 & 0.01500000000 & -0.002886751347 \\ 0.4983333333 & -0.002886751347 & 0.002886751347 & 0.5016666667 \end{bmatrix}$$

```
> red:=Eigenvectors(a);
```

$$red := \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2} I \sqrt{2} \\ \frac{-1}{2} I \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

```
> p:=red[2];v1:=Column(p,4);v2:=Column(p,3);v3:=Column(p,1)+Column
  (p,2);v4:=(Column(p,1)-Column(p,2))*I;pp:=Matrix([v1,v2,v3,v4]);
```

$$p := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} I \sqrt{2}\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v4 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$pp := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> a1:=pp^(-1).a.pp;a2:=a1^2;
```

$$a1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$a2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> limi:=Matrix(4,4,0);limi[1,1]:=1;limi;
```

$$limi := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$limi_{1, 1} := 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> pp.limi.pp^(-1);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
>
```