Soient $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & -\sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de $f$ dans la base canonique $B$ de $E = \mathbb{R}^4$ et $g_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

1. Calculer $A^{10}, A^{20}, A^{100}$. Qu'observe-t-on ?
2. Soit $A_n$ la matrice de $g_n$ dans $B$ ; calculer $A_{100}^2$. Que conjecturer ?
3. Déterminer les droites vectorielles stables par $f$.
   Vérifier que $E = \mathrm{Im}(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - Id)$ et $E = \mathrm{Im}(f - \dfrac{1}{2}Id) \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - \dfrac{1}{2}Id)$.
4. Déterminer 3 nombres réels $\alpha, \theta$ et $r$, ainsi qu'une base $B'$ de $\mathbb{R}^4$ tels que la matrice de $f$ dans $B'$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & 0 & r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

*Centrale* O20-111