$1-X^n$ est annulateur de f. Il est scindé à racines simples $\exp(i2\pi k/n)$, $k=i..i+n-1$ donc f est diagonalisable et $\mathbb{R}^n=\bigoplus_k \ker(f-\exp(i2\pi k/n)Id)$.

Si $n=2p$ est pair, $\mathbb{R}^n=\displaystyle\bigoplus_{k=-(p-1)}^{p}\ker(f-\exp(i2\pi k/n)Id)$.

$\mathbb{R}^n=\ker(f-Id)\oplus\ker(f+Id)\oplus\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p-1}(\ker(f-\exp(i2\pi k/n)Id)\oplus\ker(f-\exp(-i2\pi k/n)Id))$.

Prouvons que $(\ker(f-\exp(i2\pi k/n)Id)\oplus\ker(f-\exp(-i2\pi k/n)Id))=\ker(f^2-2\cos(2\pi k/n)f+Id)$:
$(f-\exp(i2\pi k/n)Id)\circ(f-\exp(-i2\pi k/n)Id)=f^2-2\cos(2\pi k/n)f+Id$ et les 2 facteurs commutent, donc $\ker(f-\exp(\pm i2\pi k/n)Id)\subset\ker(f^2-2\cos(2\pi k/n)f+Id)$.
Inversement, soit $x\in\ker(f^2-2\cos(2\pi k/n)f+Id)$; $x=\alpha(x_1+x_2)$ avec $x_1=f(x)-\exp(i2\pi k/n)x$, $x_2=-f(x)+\exp(-i2\pi k/n)x$ et $\alpha=\dfrac{1}{-2i\sin(2\pi k/n)}$ $(k=1..p-1)$. $x_1\in\ker(f-\exp(-i2\pi k/n)Id)$ et $x_2\in\ker(f-\exp(i2\pi k/n)Id)$ d'où le seconde inclusion.
On retrouve une situation analogue au cas $n=6$.

Si $n=2p+1$ est impair, $\mathbb{R}^n=\displaystyle\bigoplus_{k=-p}^{p}\ker(f-\exp(i2\pi k/n)Id)=\ker(f-Id)\oplus\bigoplus_{k=1}^{p}(\ker(f-\exp(i2\pi k/n)Id)\oplus\ker(f-\exp(-i2\pi k/n)Id))$:
idem en perdant la valeur propre -1.

O20-104

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> m:=proc(n)
  local a,j;
  a:=Matrix(n,n,0);
  for j from 1 to n-1 do a[j+1,j]:=1 od;
  a[1,n]:=1;
  return a;
  end;
```

$m :=$ **proc**(n)

local $a, j;$

$a :=$ Matrix$(n, n, 0)$; **for** j **to** $n-1$ **do** $a[j+1, j] := 1$ **end do**; $a[1, n] := 1$; **return** a

end proc

```
> M:=m(6);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> CharacteristicPolynomial(M,X);factor(%);
```

$$X^6 - 1$$

$$(X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

```
> iden:=DiagonalMatrix([seq(1,i=1..6)]);
```

$$iden := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> r1:=M-iden:r2:=M+iden:r3:=M^2+M+iden:r4:=M^2-M+iden:
> k1:=NullSpace(r1);k2:=NullSpace(r2);k3:=NullSpace(r3);k4:=NullSp
  ace(r4);
```

$$k1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$k2 := \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$k3 := \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$k4 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

```
> p:=Matrix([op(k1),op(k2),op(k3),op(k4)]);
```

$$p := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(p);
```

$$-72$$

```
> red:=Eigenvectors(M);d:=DiagonalMatrix(red[1]);pass:=red[2];
```

$$red := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$d := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$pass := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> MM:=simplify(pass.d.pass^(-1));
```

$$MM := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(-3+\sqrt{3}\,I)(1+\sqrt{3}\,I)}{2\,(3+\sqrt{3}\,I)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> evalc(MM[5,4]);
```

$$1$$

```
>
```