1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Calculer $\langle X^k, X^l \rangle$ pour $(k,l) \in [\![0,5]\!]^2$.
2. Donner la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.
   Tracer les polynômes obtenus sur $[-1,1]$. Montrer que ces polynômes vérifient $N_\infty(P) = \max\limits_{t\in[-1,1]} |P(t)| \leq 3\sqrt{2}$ et discuter le cas d'égalité.
3. La norme euclidienne associée au produit scalaire introduit en (a) et la norme N_∞ sont-elles équivalentes sur $\mathbb{R}_5[X]$? sur $\mathbb{R}[X]$?

Centrale O20-102