1. Si $x \in [0,1[$, alors $\sqrt{1-x}$ existe et $\forall n,\ 0 \leq x^{n^2} \leq x^n$ qui est le TG d'une série convergente.
2. Il semble exister une suite (α_n) croissante vers 1 telle que $(f_n(\alpha_n)) = (\max f_n)$ soit croissante vers une limite L de l'ordre de $0.8 - 0.9$.
3. $\forall (x,n) \in [0,1[\times \mathbb{N}^*,\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$; en particulier $f_n(\alpha_n) \leq f_{n+1}(\alpha_n) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.
4. $A_n = card\{p \in \mathbb{N}^*/1 \leq p^2 \leq n\} = card\{p \in \mathbb{N}^*/1 \leq p \leq \sqrt{n}\} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ (partie entière de $\sqrt{n}$).
5. $C_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} c_n$ (bug de texte).

   $\sum C_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum c_n x^n$ et $\sum x^n$ de même rayon de convergence 1 donc $\sum C_n x^n$ est au moins de rayon de convergence 1 et la formule demandée a un sens.

   Pour $x \in]-1,1[$, $(1-x)\displaystyle\sum_{N=0}^{+\infty} C_N x^N = \sum_{N=0}^{+\infty} C_N x^N - \sum_{N=1}^{+\infty} C_{N-1} x^N = c_0 + \sum_{N=1}^{+\infty} c_N x^N = g(x)$.

   $\displaystyle\sum_{N=0}^{+\infty} B_N x^N = \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$ donc $B_0 = 1$ et $\forall N \geq 1,\ B_N = \dfrac{(-3/2)(-5/2)...(-3/2-N+1)}{N!} = \dfrac{(2N+1)!}{2^{2N}(N!)^2}$.
6. $A_N \sim \sqrt{N}$ et $B_N \sim \dfrac{2\sqrt{N}}{\pi}$ en utilisant la formule de Stirling donc $\lim \dfrac{A_N}{B_N} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862$ (!!)
7. Soit $D_N = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} B_N$ pour tout N.

   $\sum A_N x^N$ et $\sum D_N x^N$ sont des séries entières à coefficients dans $\mathbb{R}_+$, équivalents quand $N \to +\infty$, de (même) rayon de convergence 1 et divergente pour $x = 1$ donc $\displaystyle\sum_{N\in\mathbb{N}} A_N x^N \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{N\in\mathbb{N}} D_N x^N$ (exo. classique (*) ; cf plus loin) donc $\dfrac{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}(1-x)^{-3/2}}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui n'est pas vraiment ce que dit la 1ère question, ... mais ça y ressemble.
   Preuve de (*) :
   Lemme : Si α_n est une SATP divergente telle que $\sum \alpha_n x^n$ soit de rayon de convergence 1, alors $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = +\infty$.

   En effet, soit $A_n = \displaystyle\sum_{0}^{n} \alpha_k$, $x \geq 0$ et $B \in \mathbb{R}_+$ quelconque.
   Il existe N_0 tel que $\forall n \geq N_0,\ A_n \geq B$.
   $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \geq (1-x)\sum_{n=N_0}^{+\infty} B x^n = Bx^{N_0} \geq B/2$ dès que $x \geq (0.5)^{1/N_0}$.
   On en déduit (*) par découpage "à la Cesaro" :
   Soit $\varepsilon > 0$ et p tel que $\forall n \geq p,\ |\dfrac{A_n}{D_n} - 1| \leq \varepsilon$.

   $$\Delta = \left|\frac{\sum_{N\in\mathbb{N}} A_N x^N}{\sum_{N\in\mathbb{N}} D_N x^N} - 1\right| \leq \left|\frac{\sum_{N=0}^{p-1}(A_N - D_N)x^N}{\sum_{N\in\mathbb{N}} D_N x^N}\right| + \left|\frac{\sum_{N\geq p} D_N(\frac{A_N}{D_N} - 1)x^N}{\sum_{N\in\mathbb{N}} D_N x^N}\right| \leq \left|\frac{K_p(x)}{\sum_{N\in\mathbb{N}} D_N x^N}\right| + \varepsilon \frac{\sum_{N\geq p} D_N x^N}{\sum_{N\in\mathbb{N}} D_N x^N}$$

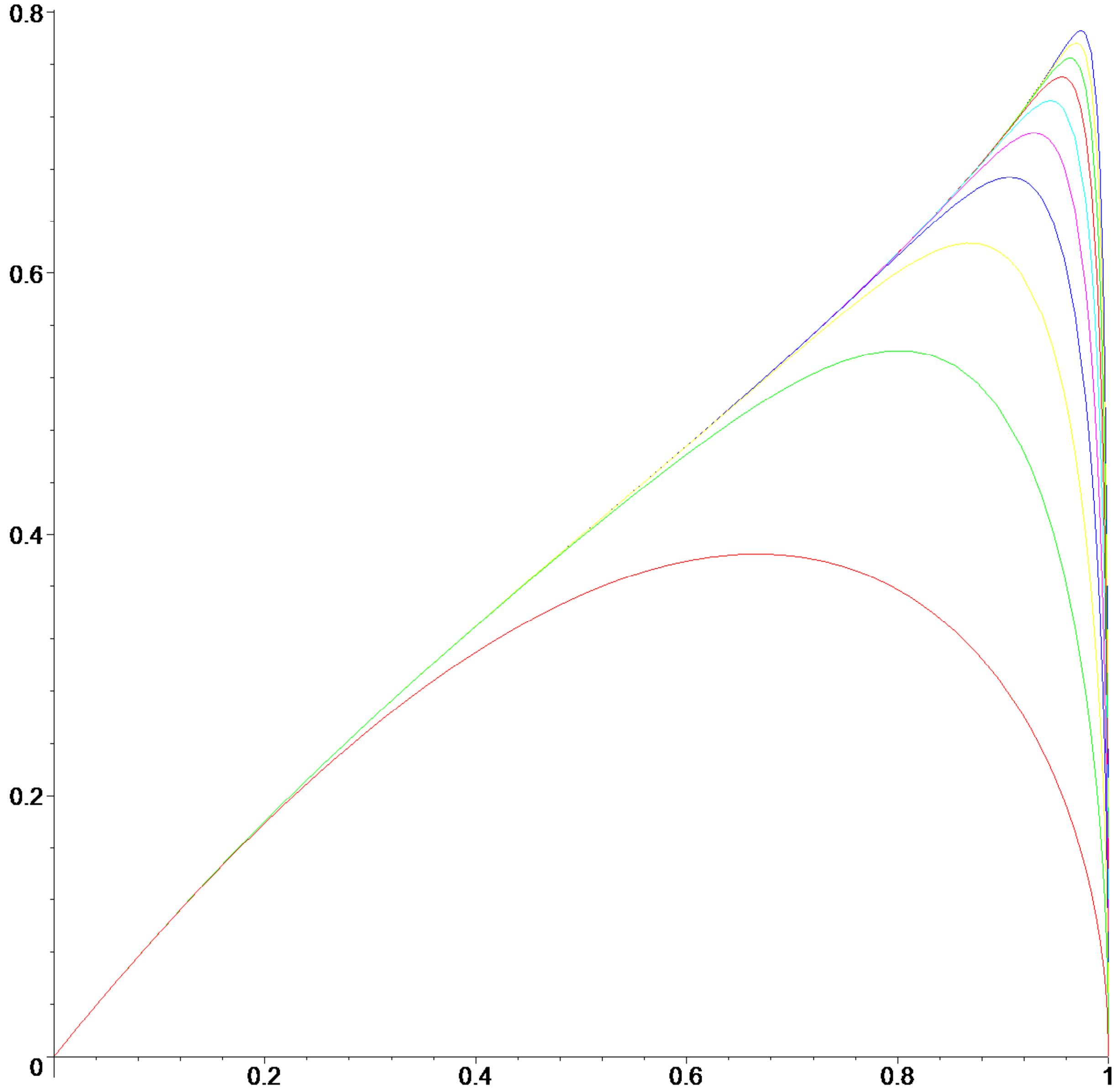
   où K_p est polynômial donc borné par M sur $[0,1]$ et, d'après le lemme, il existe $\alpha > 0$ tel que $\displaystyle\sum_{N\in\mathbb{N}} D_N x^N \geq \frac{M}{\varepsilon}$ si $x \geq 1 - \alpha$.

O19-C09

```
> restart;
> f:=n->sqrt(1-x)*sum(x^(p^2),p=1..n);
```

$$f := n \to \sqrt{1-x}\left(\sum_{p=1}^{n} x^{(p^2)}\right)$$

```
> plot([seq(f(n),n=1..10)],x=0..1);
```




```
> g:=[seq(f(2*n),n=1..20)]:evalf([seq(maximize(g[k],x=1-1/k..1),k=
  1..3)]);
```

$$[0.5409580384, 0.6736350829, 0.7320774307]$$

```
> evalf(sqrt(Pi)/2);
```

$$0.8862269255$$

```
>
```