On pose pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f_N(x) = \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{N} x^{n^2}$.

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. Représenter simultanément les fonctions f_N pour $N \in \{1, 2, ..., 10\}$.

   Quelle conjecture peut-on en déduire ?
3. Calculer les valeurs approchées des maximums des fonctions f_N pour $N \in \{2, 4, ..., 40\}$.

   On justifiera la monotonie de cette suite.
4. On note $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Donner la valeur de $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.
5. Soit g une fonction développable en série entière de rayon égal à 1.

   On note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geqslant 0$. On note $C_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$.

   Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$.

   On note $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Quelle est la valeur de $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$?
6. Calculer la limite $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{A_N}{B_N}$.

   La comparer aux valeurs trouvées à la **question 3**.
7. Montrer la conjecture de la **question 2**.