1. ..., en utilisant que $r2 = Id - 2p$ où p est le projecteur orthogonal sur la normale au plan F.
2. $A = (v1, v2, v3)$ est une matrice de rotation ssi $(v1, v2, v3)$ est une base orthonormale directe ie
   - $v1$ est unitaire (ou $\alpha = 1/3$),
   - $v1.v2 = 0$ et $v2$ est unitaire, d'où 2 solutions pour (a, b),
   - $v3 = v1 \wedge v2$, d'où 2 solutions pour $v3$ dont une seule de la forme ${}^t(2, c, d)$: $c = -11/5, d = 2/5, a = -2/5, b = 14/5$.
3. $u = (x.a)a$ et $v = x - u$.
   $r(u) = u$ et $r(v) = (\cos\theta)v + (\sin\theta)a \wedge v$.
   $r(x) = u + (\cos\theta)v + (\sin\theta)(a \wedge v) = (x.a)a + (\cos\theta)(x - (x.a)a) + (\sin\theta)(a \wedge x)$ d'où la formule demandée.
4. La solution du système différentiel est bien $B(t)X(0)$ où $B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est canoniquement associée à la rotation d'angle t autour de l'axe des x.

O19-C08

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> p1:=Matrix([[1/sqrt(2),0,-1/sqrt(2)],[0,1,0],[1/sqrt(2),0,1/sqrt(2)]]);
```

$$p1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

```
> rr1:=Matrix([[1,0,0],[0,sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2],[0,sqrt(2)/2,sqrt(2)/2]]);
```

$$rr1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

```
> r1:=p1.rr1.Transpose(p1);
```

$$r1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

```
> p2:=Matrix([[1/sqrt(2),-1/sqrt(3),1/sqrt(6)],[0,1/sqrt(3),2/sqrt(6)],[-1/sqrt(2),-1/sqrt(3),1/sqrt(6)]]);
```

$$p2 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

```
> rr2:=Matrix(3,3,0);rr2[3,3]:=-2:rr2;
```

$$rr2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> r2:=IdentityMatrix(3)+p2.rr2.Transpose(p2);
```

$$r2 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
> v1:=Vector([2,2,1])/3;v2:=Vector([-1,a,b])/3;v3:=Vector([2,c,d])
/3;
```

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{a}{3} \\ \frac{b}{3} \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{c}{3} \\ \frac{d}{3} \end{bmatrix}$$

```
> sv2:={DotProduct(v1,v2),Norm(v2,2)-1};ssv2:=solve(sv2);v21:=subs
(ssv2[1],v2);v31:=CrossProduct(v1,v21);v22:=subs(ssv2[2],v2);v32
:=CrossProduct(v1,v22);
```

$sv2 := \{\frac{1}{3}\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}-1, -\frac{2}{9}+\frac{2\,a}{9}+\frac{b}{9}\}$

$$sv2 := \{\frac{1}{3}\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}-1, -\frac{2}{9}+\frac{2\,a}{9}+\frac{b}{9}\}$$

$$ssv2 := \{a=2, b=-2\}, \{a=\frac{-2}{5}, b=\frac{14}{5}\}$$

$$v21 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

$$v31 := \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$v22 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{15} \\ \frac{14}{15} \end{bmatrix}$$

$$v32 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-11}{15} \\ \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

```
> sys:=diff(x(t),t)=0,diff(y(t),t)=-z(t),diff(z(t),t)=y(t);
```

$$sys := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = 0,\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = -\mathrm{z}(t),\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t) = \mathrm{y}(t)$$

```
> s:=dsolve({sys});sol:=subs(s,Vector([x(t),y(t),z(t)]));
```

$$s := \{\,\mathrm{y}(t) = \_C1\,\sin(t) + \_C2\,\cos(t),\ \mathrm{x}(t) = \_C3,\ \mathrm{z}(t) = -\_C1\,\cos(t) + \_C2\,\sin(t)\,\}$$

$$sol := \begin{bmatrix} \_C3 \\ \_C1\,\sin(t) + \_C2\,\cos(t) \\ -\_C1\,\cos(t) + \_C2\,\sin(t) \end{bmatrix}$$

```
> s0:=subs(t=0,sol);
```

$$s0 := \begin{bmatrix} \_C3 \\ \_C2 \\ -\_C1 \end{bmatrix}$$

```
>
```