1.
2. Soit (Π_k) : "f est $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$" ; en "admettant provisoirement" le résultat de 1), $\Pi_k)$ est héréditaire et initialisée à $k = 1$ donc vraie pour tout $k \geq 1$ et f est $\mathcal{C}^\infty$.
$$(S) \iff \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 9 \\ \forall x,\ f"(x) + 8(\cos(0)f(x) + \displaystyle\int_0^x -\sin(x-t)f(t)\ \mathrm{d}t) = 0 \end{cases}.$$
On recommence :
$$(S) \iff \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 9 \\ f"(0) + 8f(0) = 0 \\ \forall x,\ f^{(3)}(x) + 8f'(x) - 8(\sin(0)f(x) + \displaystyle\int_0^x +\cos(x-t)f(t)\ \mathrm{d}t) = f^{(3)}(x) + 9f'(x) - 9 = 0 \end{cases}.$$
La solution générale de $y" + 9y = 9$ est $x \mapsto A\cos 3x + B\sin 3x + 1$ donc
$$(S) \iff \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 9 \\ f"(0) + 8f(0) = 0 \\ f = x \mapsto A'\sin 3x + B'\cos 3x + x + C,\ (A', B', C) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}.$$
On calcule les constantes d'intégration avec les conditions initiales, d'où la solution (unique) : $f = x \mapsto 3\sin 3x = \dfrac{8}{9}\cos x + x + \dfrac{1}{9}$.
3. $H(x) = G(u(x), v(x))$ en posant $G(u, v) = \displaystyle\int_0^u h(t, v)\ \mathrm{d}t$, $u(x) = x$, $v(x) = x$.
h est continue à gauche donc $\forall v$, $u \mapsto G(u, v)$ est $\mathcal{C}^1$ (thm fondamental) et $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u, v) = h(u, v)$ donc $\dfrac{\partial G}{\partial u}$ est continue.
Pour u fixé, $v \mapsto G(u, v)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de dérivée $v \mapsto \displaystyle\int_0^u \frac{\partial h}{\partial v}(t, v)\ \mathrm{d}t$ comme intégrale à paramètre (domination locale :$\forall t \in [0, u]$ ou $[u, 0]$, $\forall v \in [a, b]$, $\|h(t, v\| \leq K$ où K est une constante).
On a la continuité de $\dfrac{\partial G}{\partial v}$ "à la main" en majorant :
Soit $|\Delta u| \leq 1$ et $|\Delta v| \leq 1$.
$|\dfrac{\partial G}{\partial v}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \dfrac{\partial G}{\partial v}(u, v)| \leq |\dfrac{\partial G}{\partial v}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \dfrac{\partial G}{\partial v}(u, v + \Delta v)| + |\dfrac{\partial G}{\partial v}(u, v + \Delta v) - \dfrac{\partial G}{\partial v}(u, v)|$,
$|\dfrac{\partial G}{\partial v}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \dfrac{\partial G}{\partial v}(u, v)| \leq |\Delta u| K + \displaystyle\int_0^u |\frac{\partial h}{\partial v}(t, v + \Delta v) - \frac{\partial h}{\partial v}(t, v)|\ \mathrm{d}t$ où K majore $|\dfrac{\partial h}{\partial v}|$ sur un compact $[0, u+1] \times [v-1, v+1]$ ou $[u-1, 0] \times [v-1, v+1]$. Le 2ème terme tend vers 0 par continuité uniforme de $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ sur tout compact (Hors programme).
On a donc par dérivation de fonction composée : H est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\forall x,\ H'(x) = \dfrac{\partial G}{\partial u}(u(x), v(x))u'(x) + \dfrac{\partial G}{\partial v}(u(x), v(x))v'(x)$ ce qui donne le résultat Maple.

O19-C06

```
> restart;
> g:=int(h(t,x),t=0..x);
```

$$g := \int_0^x \mathrm{h}(t, x)\, dt$$

```
> diff(g,x);
```

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{h}(t, x)\, dt + \mathrm{h}(x, x)$$

```
>
```