1. Soit $u_n = x \mapsto \dfrac{\exp(in^2x)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de TG $u_n(x)$ est absolument convergente ($\sum \dfrac{1}{2^n}$ est géométrique convergente) d'où l'existence de $f(x)$.

   – Pour tout n, u_n est continue sur $\mathbb{R}$,
   – $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{2^n}$ donc $\sum u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$,
   donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (Π_k) : "f est $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(k)} = x \mapsto i^k \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2k}\exp(in^2x)}{2^n}$".

   (Π_0) d'après la question 1).

   Supposons (Π_k) pour un $k \in \mathbb{N}$ et soit $v_n = x \mapsto \dfrac{n^{2k}\exp(in^2x)}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   – Pour tout n, v_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
   – $\|v_n'\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{n^{2k+2}}{2^n}$ et $n^{2k+2} = o((4/3)^n)$ donc $\|v_n'\|_\infty^{\mathbb{R}} = o((2/3)^n)$ et $\sum v_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$,
   – $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$,
   d'où (Π_{k+1}) : par récurrence, (Π_k) pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   En particulier, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $f^p(x) = i^p \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2p}\exp(in^2x)}{2^n}$.

3. $a_p = \dfrac{i^p}{p!}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2p}}{2^n}$.
   Soit $x \neq 0$ et $w_p = a_p x^p$. Prouvons que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} |w_p| = +\infty$.
   $p! \sim \sqrt{2\pi p}(p/e)^p$.
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2p}}{2^n} \geq \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{p^{2p}}{2^n} = \frac{2p^{2p}}{2^p}$.
   $|w_p| \underset{p\to+\infty}{\sim} |x|^p \dfrac{2p^{2p}}{2^p} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi p}(p/e)^p} = \alpha \left(\dfrac{|x|pe}{2}\right)^{p-1} \sqrt{p}$ où α ne dépend pas de p, d'où le résultat.
   La série de Taylor de f est de rayon de convergence nul (ie f est un exemple de fonction $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière).

4. Notons maintenant $t_{n^2}(x) = \dfrac{\exp(in^2x)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t_m(x) = 0$ si $m \in \mathbb{Z}$ n'est pas le carré d'un entier.
   $\sum t_n$ est une série trigonométrique de somme f ; il reste à justifier que c'est la série de Fourier de f (en respectant le programme).
   On remarque que f est bien $2\pi-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc admet une série de Fourier $\sum c_n \exp(in.)$.
   Soit $m \in \mathbb{Z}$. $c_m(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x)\,\mathrm{d}x$ où $y_n(x) = \dfrac{\exp(i(n^2-m)x)}{2^n}$.
   $\|y_n\|_\infty^{[0,2\pi]} = \dfrac{1}{2^n}$ donc $\sum y_n$ CV normalement sur l'intervalle compact $[0, 2\pi]$ et on peut intégrer terme à terme :
   $c_m(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} y_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\pi\delta_{m,n^2}}{2^n}$, d'où $c_m(f) = \dfrac{1}{2^n}$ si $m = n^2$ et $c_m(f) = 0$ si m n'est pas le carré d'un entier, CQFD.
   Les 3 thm de convergence des séries de Fourier peuvent s'appliquer :
   CV pour la norme $\|.\|_2$ et thm de Parseval puisque f est continue par morceaux.
   CV simple vers la régularisée (thm de Jordan-Dirichlet) puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
   CV normale sur $\mathbb{R}$ puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue.

O19-C05

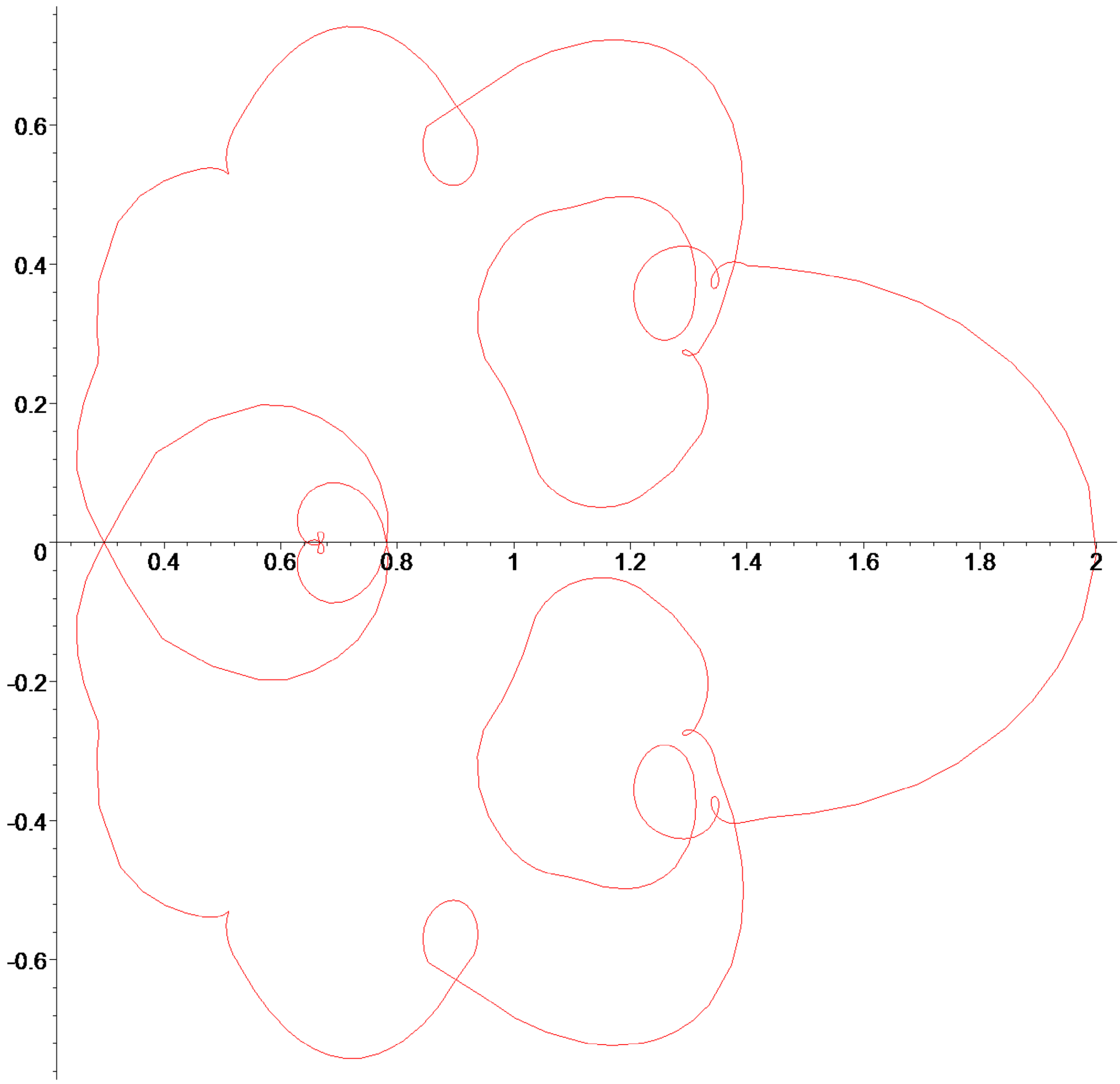
```
> restart;
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> u:=n->exp(I*n^2*x)/2^n;
```

$$u := n \to \frac{e^{(n^2\,x\,I)}}{2^n}$$

```
> s:=n->sum(u(p),p=0..n);
```

$$s := n \to \sum_{p=0}^{n} \mathrm{u}(p)$$

```
> complexplot(s(20),x=-Pi..Pi);
```




```
> v:=(n,p)->I^p*n^(2*p)/2^n;
```

$$v := (n, p) \rightarrow \frac{I^p\, n^{(2\,p)}}{2^n}$$

```
> a:=sum(v(n,p),n=0..infinity)/p!;
```

$$a := \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^p\, n^{(2\,p)}}{2^n}}{p!}$$

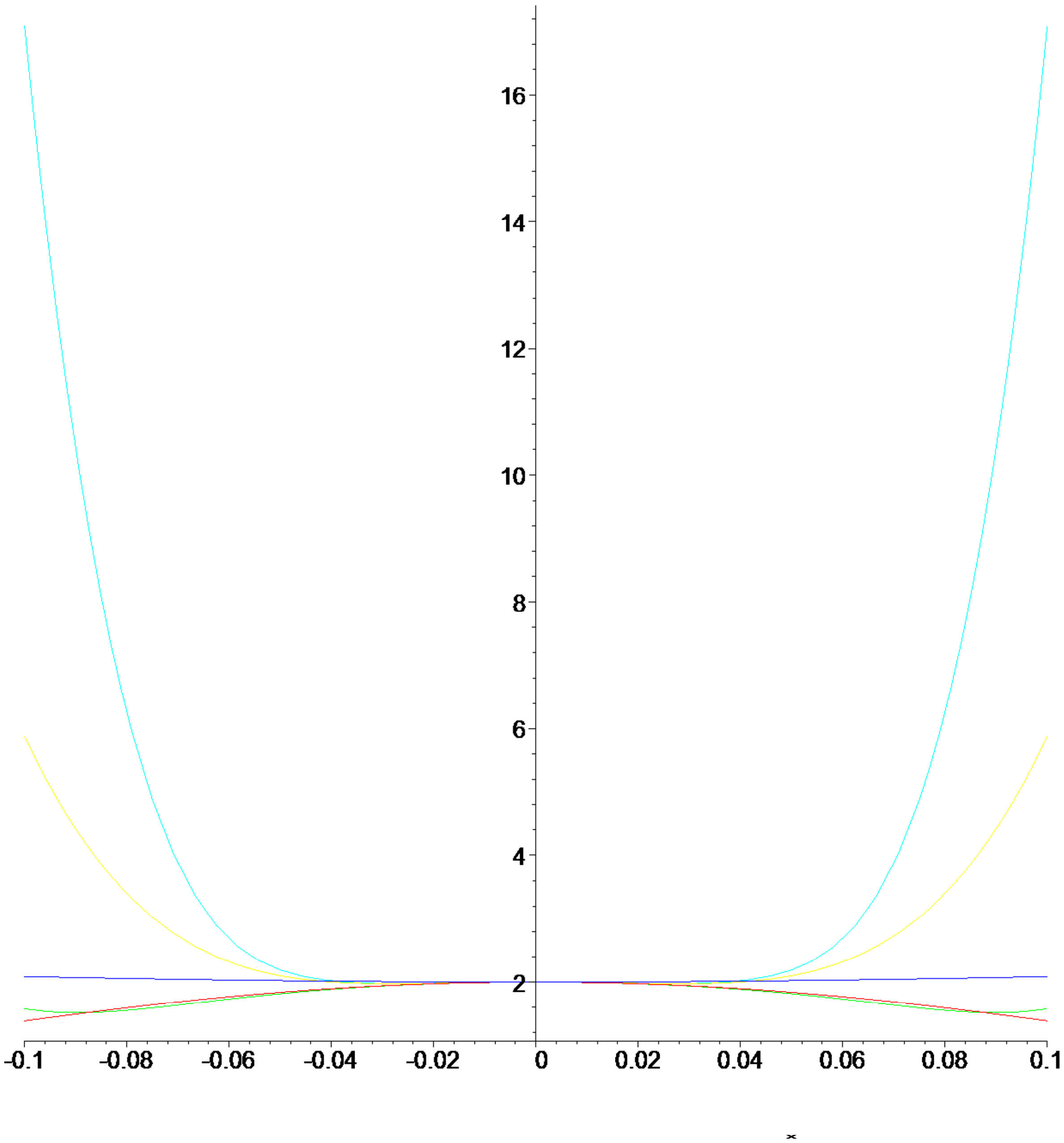
```
> aa:=[seq(simplify(subs(p=k,a)),k=0..9)];
```

$$aa := \left[2,\ 6\,I,\ \text{-}75,\ \text{-}1561\,I,\ \frac{181945}{4},\ \frac{34082521}{20}\,I,\ \frac{\text{-}1872771173}{24},\ \frac{\text{-}3547114323481}{840}\,I, \right.$$
$$\left. \frac{354376978798757}{1344},\ \frac{161215936345564063}{8640}\,I \right]$$

```
> G:=p->abs(sum(aa[k+1]*x^k,k=0..p));
```

$$G := p \rightarrow \left| \sum_{k=0}^{p} aa_{k+1}\, x^k \right|$$

```
> plot([seq(G(p),p=1..5)],x=-0.1..0.1,color=[blue,red,green,yellow
,cyan]);
```


16
14
12
10
8
6
4
2
-0.1
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
x

>