L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure affine canonique.

Soit le triangle ABC avec B et C des points sur l'axe des abscisses. Pour M un point de l'axe des abscisses, on note

- P_M le projeté orthogonal de M sur (AC) ;
- Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
- R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC).

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M.

On cherche à résoudre $\varphi(x) = x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Étant donné trois points I, J et M avec $I \neq J$, déterminer le système vérifié par les coordonnées du projeté de M sur la droite (IJ).

2. Écrire une procédure `proj` qui, pour les points I, J et M donnés avec $I \neq J$, retourne le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ).

3. En utilisant la procédure `proj`, écrire une procédure qui, pour un réel x donné, retourne l'abscisse du point R_M avec $M(x,0)$.

On choisit les points $B(0,0)$, $C(3,0)$ et $A(1,2)$. Pour x réel, on définit la suite de points $M_n(x_n,0)$ du plan par

$$x_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

4. Étant donnés un réel x et un entier N, programmer la représentation graphique des $N+1$ premiers termes de la suite (x_n). Tester pour $x = 2{,}9$ et $N = 100$. Qu'observe-t-on ?

5. Pour M et M' des points distincts de (BC) avec $M \neq C$, justifier l'égalité

$$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c|$$

où c est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.

6. En déduire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant k|x-y|$$

7. En admettant la convergence de la suite (x_n), déterminer une solution approchée de l'équation $\varphi(x) = x$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = x_{n+1} - x_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

En déduire la convergence de $\sum u_n$.

9. Conclure.