

1. Unicité : Soit P_n et Q_n tels que $\forall z \in \mathbb{C}^*, P_n(z + z^{-1}) = Q_n(z + z^{-1}) = z^n + z^{-n}$.
 En particulier, pour $z = \exp(i\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall x = 2 \cos \theta \in [-2, 2]$, $P_n(x) = Q_n(x)$: $P_n - Q_n$ s'annule sur un ensemble infini donc est le polynôme nul.
 Existence : Soit Π_n : "Il existe P_n , polynôme de degré n , à coefficients dans Z , de terme dominant X^n pour $n \geq 1$, 2 pour $n = 0$ tel que ...".
 Π_0 ($P_0 = 2$) et Π_1 ($P_1 = X$).
 Supposons Π_{n-1} et Π_n pour un $n \geq 1$. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $(z + z^{-1})P_n(z + z^{-1}) = z^{n+1} + z^{-(n+1)} + P_{n-1}(z + z^{-1})$; $XP_n - P_{n-1}$ est un polynôme de degré $n + 1$, à coefficients dans \mathbb{Z} , de terme dominant X^{n+1} , et qui vérifie $\forall z \in \mathbb{C}^*$, ..., d'où Π_{n+1} .
 Par récurrence, la suite existe et vérifie la relation $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$.
2. Soit $(P, Q) \in E^2$ et $f = t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{4-t^2}}$.
 f est CM sur $] - 2, 2[$; PQ est continue donc bornée sur le segment $[-2, 2]$ donc bornée sur $] - 2, 2[$ donc $|f(t)| =_{t \rightarrow 2} O(\frac{1}{(2-t)^{1/2}})$; f est intégrable sur $[0, 2[$, et de même sur $] - 2, 0]$.
 On vient de prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application de E^2 dans \mathbb{R} .
 Elle est clairement linéaire à droite et symétrique.
 Par positivité de \int_{-2}^2 , elle est positive et, pour tout $P \in E$, $(t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{4-t^2}})$ étant continue à valeurs dans \mathbb{R}_+ et par positivité stricte de \int_{-2}^2 , P s'annule sur $] - 2, 2[$ qui est infini, donc est le polynôme nul.
 (P_0, \dots, P_6) est une famille orthogonale.
 Généralisation : Par changement de variable \mathcal{C}^1 -bijectif $(\theta \in]0, \pi[\mapsto x = 2 \cos \theta \in] - 2, 2[)$, on a :

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{\pi}^0 \frac{2 \cos n\theta \cdot 2 \cos m\theta}{2 \sin \theta} (-2 \sin \theta d\theta) = 0 \text{ si } n \neq m.$$
 $(P_k / \|P_k\|)_{k=0..n}$ est une famille orthonormale telle que $\forall k, Vect(P_0, \dots, P_k) = Vect(X^0, \dots, X^k)$, donc, au signe près éventuellement, c'est l'orthonormalisée de Schmidt de la base usuelle de E (rubrique "unicité" dans Gram-Schmidt).
3. Il semble que tout P_n admette n racines réelles distinctes situées dans $[-2, 2]$. Prouvons le.
 Soit $n \geq 1$ et $x = 2 \cos t = z + z^{-1}$ avec $z = e^{it}$.
 $P_n(x) = 0 \iff 2 \cos nt = 0 \iff t = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$.
 $0 \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leq \pi \iff k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $2 \cos$ induit une injection de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} donc les $2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$, $k = 0..n-1$ sont n racines distinctes de P_n (situées dans $[-2, 2]$).

[O19-C02

[> **restart;**

> **P:=proc(n)**

local l,i,ll;

l:=[2,X];

for i from 2 to n do

l:=[op(l),X*l[i]-l[i-1]]

od;

ll:=expand(l);

return ll;

end;

P := proc(n)

local l, i, ll;

l := [2, X];

for i from 2 to n do *l := [op(l), X*l[i] - l[i - 1]]* **end do;**

ll := expand(l);

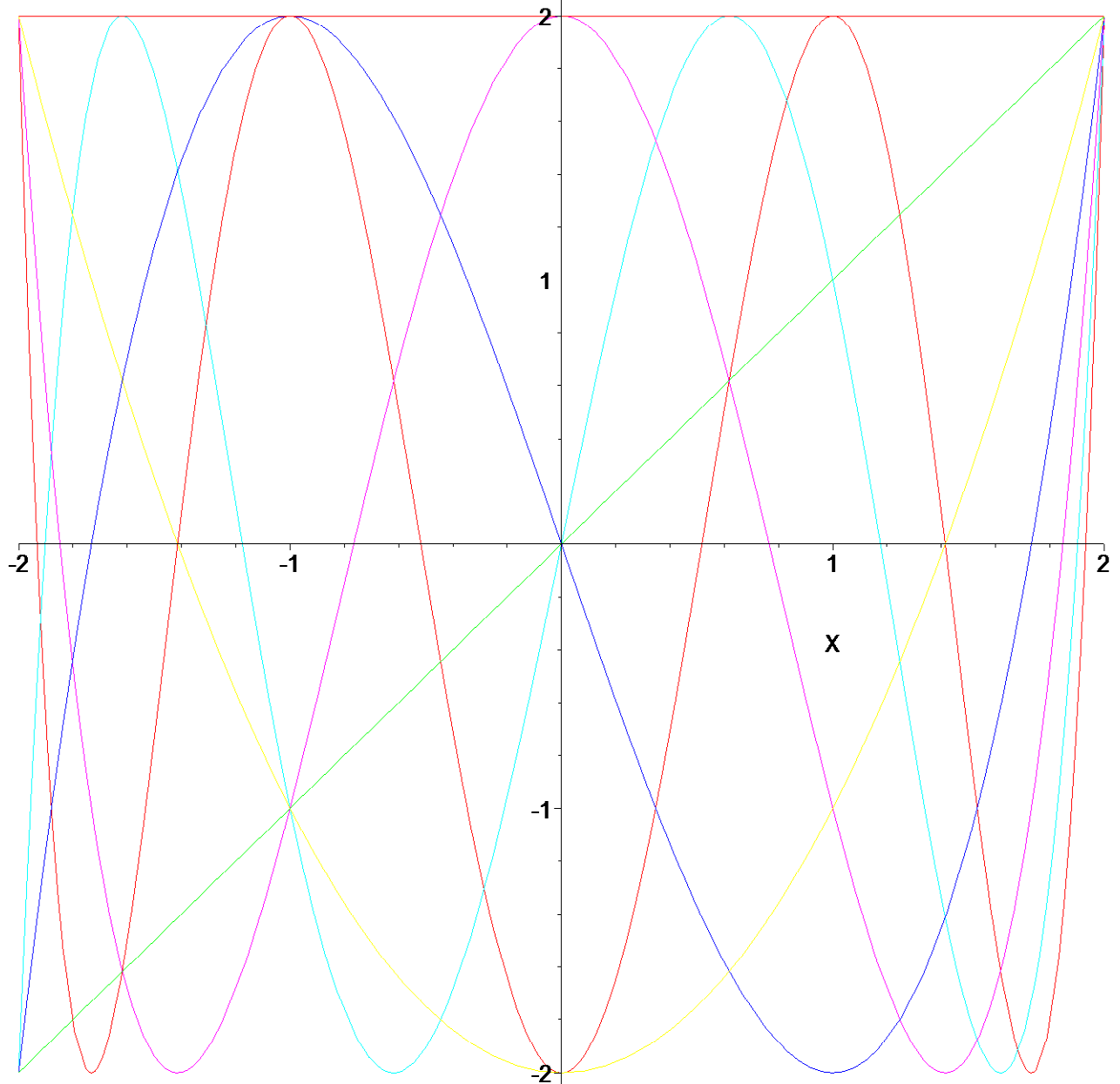
return ll

end proc

> **S:=P(6);**

$S := [2, X, X^2 - 2, X^3 - 3X, X^4 - 4X^2 + 2, X^5 - 5X^3 + 5X, X^6 - 6X^4 + 9X^2 - 2]$

> **plot(S,X=-2..2);**



```
> ps:=(a,b)->int(a*b/sqrt(4-X^2),X=-2..2);
```

$$ps := (a, b) \rightarrow \int_{-2}^2 \frac{a b}{\sqrt{4 - X^2}} dX$$

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> m:=Matrix(7,7,(i,j)->ps(S[i],S[j]));
```

$$m := \begin{bmatrix} 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi \end{bmatrix}$$

```
> GS:=proc(l,k)
```

```

local lo,v,i,N,coef;
N:=a->sqrt(ps(a,a));
lo:=[l[1]/(N(l[1]))];
for i from 2 to k do
    coef:=[seq(ps(lo[j],l[i]),j=1..i-1)];
    v:=l[i]-sum('coef[j]*lo[j]','j'=1..i-1);
    lo:=[op(lo),v/N(v)]
od;
return lo;
end;

```

GS := proc(l, k)

local lo, v, i, N, coef;

N := a → sqrt(ps(a, a));

lo := [l[1] / N(l[1])];

for i from 2 to k do

coef := [seq(ps(lo[j], l[i]), j = 1 .. i - 1)];

v := l[i] - sum('coef[j]*lo[j]', 'j' = 1 .. i - 1);

lo := [op(lo), v / N(v)]

end do;

return lo

end proc

> l:=[seq(X^i,i=0..6)]:k:=7;GS(l,k);

$$\begin{aligned}
 & k := 7 \\
 & \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{X\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}, \frac{(X^2-2)\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}, \frac{(X^3-3X)\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}, \frac{(X^4-4X^2+2)\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}, \frac{(X^5-5X^3+5X)\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}, \right. \\
 & \left. \frac{(X^6-6X^4+9X^2-2)\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \right]
 \end{aligned}$$

> for i from 1 to 7 do a:=[solve(S[i])];print(a,evalf(a)) od:

$$\begin{aligned}
 & [1, [] \\
 & [0], [0.] \\
 & [\sqrt{2}, -\sqrt{2}], [1.414213562, -1.414213562] \\
 & [0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}], [0., 1.732050808, -1.732050808] \\
 & [-\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, -\sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2}}], \\
 & [-1.847759065, 1.847759065, -0.7653668650, 0.7653668650] \\
 & \left[0, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}, -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \right], \\
 & [0., -1.902113032, 1.902113032, -1.175570504, 1.175570504] \\
 & \left[\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right],
 \end{aligned}$$

```

[ 1.414213562, -1.414213562, -1.931851653, 1.931851653, -0.5176380910, 0.5176380910]
> for i from 1 to 6 do
  a:=[seq(eval(2*cos((1+2*k)*Pi/2/i)),k=0..i-1)]:print(a,evalf(a))
od:

[0], [0.]
[ $\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$ ], [1.414213562, -1.414213562]
[ $\sqrt{3}$ , 0,  $-\sqrt{3}$ ], [1.732050808, 0., -1.732050808]
[ $2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ,  $2 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ ,  $-2 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ ,  $-2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ],
[1.847759065, 0.7653668650, -0.7653668650, -1.847759065]
[ $2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ,  $2 \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ , 0,  $-2 \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ ,  $-2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ],
[1.902113033, 1.175570504, 0., -1.175570504, -1.902113033]
[ $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ,  $-2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ,  $-\sqrt{2}$ ,  $-2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ],
[1.931851653, 1.414213562, 0.5176380902, -0.5176380902, -1.414213562, -1.931851653]
>
[ >

```