1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P_n(z+z^{-1}) = z^n + z^{-n}$$

On recherchera une relation de récurrence vérifiée par cette famille de polynômes ; on pourra pour cela calculer le produit

$$(z^n + z^{-n})(z+z^{-1})$$

pour $z \in \mathbb{C}^*$.

2. Calculer les valeurs de P_n pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

Que peut-on conjecturer quant au degré, aux coefficients, au coefficient dominant, à la parité de P_n ?

Démontrer rapidement ces propriétés.

3. Représenter les polynômes P_n, pour $0 \leqslant n \leqslant 6$, sur le même graphe.

4. On note $E = \mathbb{R}_6[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 6 et on pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \quad \langle P,Q \rangle = \int_{-2}^{2} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{4-t^2}} \mathrm{d}t$$

a. Vérifier la convergence de l'intégrale et prouver que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

b. Calculer $\langle P_i,P_j \rangle$ pour tout $(i,j) \in \{0,\dots,6\}^2$.

Que peut-on en déduire ?

c. Soit $(Q_n)_{0\leqslant n\leqslant 6}$ la base orthonormale de E construite à partir de la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.

Expliciter Q_n pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

Que remarque-t-on ?

d. Démontrer directement le résultat de la question précédente.

5. Déterminer les racines de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier le résultat obtenu pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.