1. X^p est annulateur de M donc $sp(M) \subset \{0\}$ et $sp(M)$ n'est pas vide donc $sp(M) = \{0\}$.
   Si M est triangulaire supérieure, sa diagonale est nulle, donc $f(E_1) = \{0\}$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(E_k) \subset E_{k-1}$ en notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et E_k le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1, ..., e_k)$.
   On a donc $f^n(\mathbb{R}^n) = f^n(E_n) \subset f^{n-1}(E_{n-1})... \subset f(E_1) = \{0\}$ donc $f^n = 0$ et $r \leq n$.
   Dans le cas général, M est semblable à une matrice triangulaire supérieure, d'où le même résultat. (Rem : L'utilisation du thm de Cayley-Hamilton est prohibée...)
   La matrice nulle (nilpotente avec $r = 1$) est diagonalisable. Réciproquement, si M nilpotente est diagonalisable, elle annule un polynôme $\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)$ à racines distinctes, de degré au moins 1, or chaque $M - \alpha_k I_n$ tel que $\alpha_k \neq 0$ est inversible, donc M annule X ie est la matrice nulle.
2. La 1ère colonne de n^5 n'est pas nulle donc e_1 vérifie $n^5 e_1 \neq 0$.
   Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_5)$ tel que $\lambda_0 e_1 + \lambda_1 n e_1 + ... + \lambda_5 n^5 e_1 = 0$.
   En multipliant (à gauche) par $n, n^2, ..., n^5$, on en déduit $\lambda_0 = 0, ..., \lambda_5 = 0$.
   La matrice dans la base $(f^5(e_1), ..., f(e_1), e_1)$ de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ canoniquement associé à n est J, tous les ε_i étant égaux à 1.
3. Prouvons que, si N est une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $Q_n(N) = P_n(-N)$ est l'inverse de $P_n(N)$.
   On remarque d'abord que 0 n'est pas racine de $P_n = \prod_1^n (X - \alpha_i)$ donc chaque $N - \alpha_i I_n$ est inversible, et $P_n(N)$ est inversible.
   L'ordre de nilpotence de N est au plus n, donc $P_n(N)P_n(-N) = (\sum_0^m \frac{1}{k!} N^k)(\sum_0^m \frac{1}{k!}(-N)^k)$ pour tout m entier tel que $m \geq n$. $P_n(N)P_n(-N)$ est donc un polynôme en N de la forme $\sum_0^{2n} c_k N^k$ où c_k est le coefficient de X^k dans le produit de Cauchy de $\sum \frac{z^k}{k!}$ par $\sum \frac{(-z)^k}{k!}$ ie dans $\exp(z - z) = 1$ donc $c_0 = 1$ et $\forall k \geq 1,\ c_k = 0$ d'où $P_n(N)P_n(-N) = I_n$.

O19-C01

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> nilpot:=proc(a,n)
  local ind,essai,puiss;
  ind:=-1;
  essai:=1;
  puiss:=a;
  while essai<n+1 and ind=-1 do
        if convert(puiss,listlist)=convert(Matrix(n,n,0),listlist)
  then
                ind:=essai
        else
                puiss:=a.puiss;
                essai:=essai+1
        fi;
  od;
  return ind;
  end;
```

nilpot := **proc**(*a*, *n*)
local *ind*, *essai*, *puiss*;
    ind := -1;
    essai := 1;
    puiss := *a*;
    while *essai* < *n* + 1 **and** *ind* = -1 **do**
        if convert(*puiss*, *listlist*) = convert(Matrix(*n*, *n*, 0), *listlist*) **then** *ind* := *essai*
        else *puiss* := *a* . *puiss*; *essai* := *essai* + 1
        end if
    end do;
    return *ind*
end proc

```
> a:=Matrix(2,2,0);b:=Matrix(2,2,[[0,1],[0,0]]);
```

$$a := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> nilpot(a,2);nilpot(b,2);
```

$$1$$

$$2$$

```
> m:=Matrix(4,4,[[2,1,0,0],[-4,-2,0,0],[7,1,1,1],[-17,-6,-1,-1]]);
```

$$m := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> nilpot(m,4);
```

$$2$$

```
> a:=Matrix(6,6,0);
```

$$a := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to 5 do a[i+1,i]:=1 od;a;
```

$$a_{2,\,1} := 1$$

$$a_{3,\,2} := 1$$

$$a_{4,\,3} := 1$$

$$a_{5,\,4} := 1$$

$$a_{6,\,5} := 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> a[1,6]:=-15625;a[2,6]:=18750;a[3,6]:=-9375;a[4,6]:=2500;a[5,6]:=
  -375;a[6,6]:=30;a;
```

$$a_{1,\,6} := -15625$$

$$a_{2,\,6} := 18750$$

$$a_{3,\,6} := -9375$$

$$a_{4,\,6} := 2500$$

$$a_{5,\,6} := -375$$

$$a_{6,\,6} := 30$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18750 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9375 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues(a);
```

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> n:=a-5*IdentityMatrix(6);
```

$$n := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15625 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 18750 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & -9375 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 2500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{bmatrix}$$

```
> nilpot(n,6);
```

$$6$$

```
> n^5;
```

$$\begin{bmatrix} -3125 & -15625 & -78125 & -390625 & -1953125 & -9765625 \\ 3125 & 15625 & 78125 & 390625 & 1953125 & 9765625 \\ -1250 & -6250 & -31250 & -156250 & -781250 & -3906250 \\ 250 & 1250 & 6250 & 31250 & 156250 & 781250 \\ -25 & -125 & -625 & -3125 & -15625 & -78125 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{bmatrix}$$

```
> v:=Vector([1,0,0,0,0,0]);
  l:=[v]:for i from 1 to 5 do l:=[n.l[1],op(l)] od:l;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} -3125 \\ 3125 \\ -1250 \\ 250 \\ -25 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 625 \\ -500 \\ 150 \\ -20 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -125 \\ 75 \\ -15 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 \\ -10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

```
> p:=Matrix(l);
```

$$p := \begin{bmatrix} -3125 & 625 & -125 & 25 & -5 & 1 \\ 3125 & -500 & 75 & -10 & 1 & 0 \\ -1250 & 150 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ 250 & -20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> p^(-1).a.p;
  j:=p^(-1).n.p;
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$j := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> X:='X':P5:=IdentityMatrix(6)+X+X^2*(1/2)+X^3*(1/6)+X^4*(1/24)+X^5*(1/120);
```

$$P5 := X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} + \frac{X^5}{120} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Y:=eval(subs(X=j,P5));
```

$$Y := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Z:=eval(subs(X=-j,P5));
```

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{-1}{120} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Y.Z;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>